Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Clemens Rösner

Algorithmen und Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2013/14
Abgabe: 12.11.2013, 12:30 Uhr

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

2+4 Punkte

Eine Spedition liefert mit einem LKW Waren von Berlin nach Köln. Um Kosten zu sparen, sollen alle Waren mit möglichst wenigen Fahrten transportiert werden, und um Beschwerden der Kunden vorzubeugen, wird kein Auftrag vor einem anderen Auftrag bearbeitet, der früher eingegangen ist. Um dies umzusetzen, werden die Waren in der Reihenfolge ihrer Ankunft in den LKW geladen und der LKW fährt ab, sobald der nächste Auftrag ihn überladen würde. Die Spedition fragt sich, ob ihre Strategie optimal ist. Kann es sinnvoll sein, den LKW bereits auf die Fahrt zu schicken, bevor der nächste Auftrag ihn überladen würde? Die Spedition möchte jedoch unter keinen Umständen von der „first-come, first-served“-Strategie abweichen.

(a) Formalisieren Sie das Problem. Gehen Sie dabei davon aus, dass nicht die Ausmaße der Waren, sondern einzig ihre Gewichte der limitierende Faktor für die Beladung des LKW sind.

(b) Beweisen Sie, dass die Strategie der Spedition unter der Maßgabe von „first-come, first-served“ optimal ist.

Aufgabe 4.2

6 Punkte

Wir betrachten das ganzzahlige Rucksackproblem eingeschränkt auf Instanzen, in denen die Gewichte aufsteigend und die Nutzen absteigend sortiert sind, d. h. $w_1 \leq \ldots \leq w_n$ und $p_1 \geq \ldots \geq p_n$. Zeigen Sie, wie diese Variante des Rucksackproblems mithilfe eines Greedy-Algorithmus optimal gelöst werden kann.

Aufgabe 4.3

3+3 Punkte

Verteilt entlang eines langen Abschnitts einer Landstraße befinden sich mehrere Tankstellen in verschiedenen Abständen voneinander.

(a) Herr Meier möchte über die gesamte Strecke fahren. Bevor er losfährt, möchte er seine Tankstopps so planen, dass er möglichst selten anhalten muss. Er weiß, dass er mit einem vollen Tank n Kilometer weit fahren kann und wo sich die Tankstellen befinden. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der die optimalen Tankstopps berechnet. Sie können dabei davon ausgehen, dass Herr Meier mit einem vollgetankten Wagen losfährt.

(b) Entlang der Strecke sollen Funkmasten für Handynetze errichtet werden. Die Masten sollen so platziert werden, dass keine der Tankstellen mehr als 10 km von dem nächsten Funkmast entfernt ist. Für diese Planung können wir annehmen, dass die Straße vollkommen gerade verläuft. Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, der eine optimale Platzierung der Funkmasten berechnet und so wenig Masten wie möglich benötigt.

Aufgabe 4.4

1+2+3 Punkte

Wir betrachten ein Problem aus dem Bereich *Scheduling*. Die Eingabe besteht wie in der Vorlesung aus einer Menge $S = \{1, \ldots, n\}$ von Aufgaben. Jede Aufgabe i besitzt einen Startzeitpunkt $s_i \geq 0$ und einen Fertigstellungszeitpunkt $f_i > s_i$. Anders als in der Vorlesung wollen wir aber nicht möglichst viele Aufgaben mit einem Prozessor, sondern alle Aufgaben mit möglichst wenigen Prozessoren bearbeiten. Jeder Prozessor kann zu jedem Zeitpunkt maximal eine Aufgabe bearbeiten.

Zur Lösung des Problems nutzen wir einen Greedy-Algorithmus GREEDY für die Problemvariante aus der Vorlesung mit nur einem Prozessor, auf dem möglichst viele überschneidungsfreie Aufgaben ausgeführt werden sollen. Wir bestimmen mittels GREEDY die Menge der Aufgaben, die vom ersten Prozessor ausgeführt werden.

Sind noch Aufgaben übrig, so bestimmen wir von diesen wieder mittels Greedy eine Teilmenge, die auf dem zweiten Prozessor ausgeführt wird. Dieses Vorgehen wiederholen wir, solange es noch Aufgaben gibt, die nicht zugewiesen sind.

Es stellt sich nun die Frage, welcher Greedy-Algorithmus Greedy gewählt werden sollte. Bearbeiten Sie hierzu die folgenden Teilaufgaben.

(a) Geben Sie eine nicht triviale untere Schranke für die Anzahl an benötigten Prozessoren an.

(b) Geben Sie eine Instanz an, für die mit der Methode GreedyEnde aus der Vorlesung keine optimale Lösung gefunden wird.

(c) Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, mit dem auf jeder Instanz eine optimale Lösung gefunden wird.

Aufgabe 4.5

6 Zusatzpunkte

Der Algorithmus GreedyKP berechnet für eine Instanz des Rucksackproblems mit teilbaren Objekten in Zeit $O(n \log n)$ eine optimale Lösung. Zeigen Sie, dass eine optimale Lösung auch in linearer Zeit gefunden werden kann.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass der Median einer Menge von n reellen Zahlen in Zeit $O(n)$ berechnet werden kann.