Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Clemens Rösner

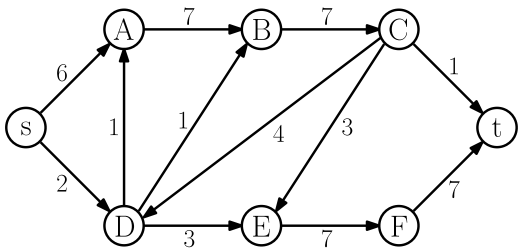
Algorithmen und Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2013/14
Abgabe: 28.01.2014, 12:30 Uhr

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1

3+3 Punkte

(a) Bestimmen Sie in dem unten abgebildeten Netzwerk einen maximalen Fluss von Knoten s nach Knoten t. Begründen Sie, warum der von Ihnen angegebene Fluss maximal ist.



(b) Im Algorithmus von Ford und Fulkerson ist nicht vorgeschrieben, welcher flussvergrößernde Weg zu wählen ist, falls mehrere existieren. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des Algorithmus von Ford und Fulkerson nicht in der Größe des Flussnetzwerkes beschränkt ist.

Hinweis: Geben Sie dafür ein Flussnetzwerk mit konstant vielen Knoten und Kanten sowie endlichen Kantenkapazitäten an und zeigen Sie für dieses Netzwerk, dass die Anzahl der Verbesserungsschritte beliebig groß werden kann, wenn beliebige Kapazitäten erlaubt sind.

Aufgabe 13.2

3+3 Punkte

Führen Sie die folgenden Varianten des Flussproblems auf die Standardversion aus der Vorlesung zurück. Erklären Sie, wie ein Fluss für die jeweilige Variante in einen Fluss für die Standardversion des Flussproblems transformiert werden kann und umgekehrt. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.

(a) Zusätzlich zu den Kantenkapazitäten gibt es Knotenkapazitäten. Für einen zulässigen Fluss f muss nun außerdem gelten:

$$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f(u,v) \le C(v) \text{ für alle } v \neq s \quad \text{und} \quad \sum_{v\colon (s,v)\in E} f(s,v) \le C(s)\,,$$

wobei $C\colon V \to \mathbb{N}_0$ die Kapazitäten der Knoten angibt.

(b) Statt einer Quelle s und einer Senke t gibt es jetzt mehrere Quellen $s_1,\dots,s_k$ und mehrere Senken $t_1,\dots,t_\ell$.

Aufgabe 13.3

2+2+2 Punkte

Implementieren Sie den Algorithmus von Ford und Fulkerson. Bestimmen Sie damit einen maximalen Fluss f für das in der Datei `Ue13.txt` gespeicherte Flussnetzwerk G. Die Datei und eine Erklärung des Dateiformates können auf der Homepage heruntergeladen werden.

(a) Geben Sie den Wert $|f|$ des Flusses f an.

(b) Geben Sie den Knoten mit der größten Nummer an, der im Restnetzwerk G_f von s aus erreichbar ist.

(c) Gibt es noch einen anderen maximalen Fluss?

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 13.5.

Aufgabe 13.4 6 Punkte

Gegeben sei die Tabelle der Fußball-Bundesliga, die den Punktestand zu einem bestimmten Zeitpunkt wiedergibt, sowie eine Liste der noch ausstehenden Spiele. Wir betrachten die alte Zweipunkteregel, d. h. die siegreiche Mannschaft erhält zwei Punkte und der Verlierer keinen. Bei einem Unentschieden erhält jede Mannschaft einen Punkt. Das *Meisterschaftsproblem* besteht darin zu entscheiden, ob eine gegebene Mannschaft noch Meister werden kann. Dazu muss sie in der Gesamtwertung die meisten Punkte haben. Gibt es mehrere Mannschaften mit derselben Punktzahl, dann muss sie unter diesen das beste Torverhältnis haben. Wir gehen davon aus, dass die gegebene Mannschaft noch mindestens ein Spiel zu bestreiten hat.

Modellieren Sie das Meisterschaftsproblem als Flussproblem. Geben Sie an, wie Sie an dem von Ihnen konstruierten Flussnetzwerk ablesen können, ob die gegebene Mannschaft die Meisterschaft gewinnen kann. Zeigen Sie, dass Ihre Vorgehensweise korrekt ist.

Hinweis: Sie können annehmen, dass die gegebene Mannschaft alle ausstehenden Spiele gewinnt und dabei hinreichend viele Tore schießt, sodass sie von allen Mannschaften das beste Torverhältnis hat. So kann man berechnen, wie viele Punkte sie noch erreichen kann und es ist klar, wie viele Punkte jede der anderen Mannschaften höchstens noch bekommen darf. Es müssen also nur die Spiele betrachtet werden, an denen die Mannschaft nicht beteiligt ist. Die Frage ist demnach, ob die restlichen Spiele alle so ausgehen können, dass keine Mannschaft mehr als diese Punktzahl erreicht.

Aufgabe 13.5 6 Zusatzpunkte

Sei $G = (V, E)$ ein Flussnetzwerk, sei f ein maximaler Fluss und sei $G_f = (V, E_f)$ das dazugehörige Restnetzwerk. Zeigen Sie, dass es genau dann einen anderen maximalen Fluss f' gibt, wenn das Restnetzwerk G_f einen einfachen Kreis der Länge mindestens 3 enthält.