Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Clemens Rösner

universitätbonn

Algorithmen und Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2013/14
Abgabe: 07.01.2014, 12:30 Uhr

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

6 Punkte

Wir betrachten die erste *Union-Find*-Datenstruktur aus der Vorlesung, d. h. ein n-elementiges Feld A, in dem für jedes Element $i \in \{1, \ldots, n\}$ gespeichert ist, zu welcher Menge es gehört. Zusätzlich ist für jede Menge ihre Größe und eine Liste der Elemente der Menge gegeben.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit für jede Folge von UNION-Operationen auf n Elementen höchstens $O(n \log n)$ ist. Wie sieht eine Folge solcher UNION-Operationen auf n Elementen aus, deren Laufzeit wirklich $\Theta(n \log n)$ beträgt? Beweisen Sie Ihre Aussage. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall, dass n eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 10.2

3+3 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Wir betrachten eine Tiefensuche auf G. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle Knoten $u, v \in V$ gilt: Gibt es einen Weg von u nach v in G, dann gilt $v.d \leq u.f$.

(b) Für jeden Knoten $u \in V$ mit In- und Outgrad mindestens 1 gibt es einen Knoten $v \in V$, sodass (u, v) oder (v, u) eine T-Kante ist.

Aufgabe 10.3

6 Punkte

Implementieren Sie einen Algorithmus, der für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und deren Größen ausgibt. Wenden Sie Ihren Algorithmus auf die Instanzen

(a) `Ue10_small.txt` mit $|V| = 50$,

(b) `Ue10_medium.txt` mit $|V| = 200$ und

(c) `Ue10_large.txt` mit $|V| = 500$

an, die auf der Homepage heruntergeladen werden können. Das Dateiformat ist dort ebenfalls erklärt.

Aufgabe 10.4

3+3 Punkte

Es sei A die Adjazenzmatrix eines (gerichteten oder ungerichteten) Graphen. Das Boolesche Matrixprodukt $Z = X * Y$ zweier $(n \times n)$-Matrizen X und Y über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$z_{ij} = \bigvee_{\ell=1}^{n} (x_{i\ell} \wedge y_{\ell j}) \, .$$

Dabei werden, wie üblich, 1 als *true* und 0 als *false* interpretiert. Es sei A^k die k-te Potenz von A, d. h. $A^1 = A$ und $A^k = A * A^{k-1}$ für $k \geq 2$.

(a) Welche Bedeutung haben die Einträge von A^k? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

(b) Sei $f(n)$ der Aufwand, zwei gegebene $(n \times n)$-Matrizen X und Y über $\{0, 1\}$ zu multiplizieren. Beschreiben Sie, wie man für $k \geq 2$ in Zeit $O(\log(k) \cdot f(n))$ die k-te Potenz A^k einer Adjazenzmatrix A berechnen kann. Sie können davon ausgehen, dass das Boolesche Matrixprodukt assoziativ ist. Das bedeutet insbesondere, dass $A^{k_1} * A^{k_2} = A^{k_1+k_2}$ für beliebige natürliche Zahlen k_1 und k_2 gilt.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie man mit möglichst wenigen Multiplikationen spezielle große Potenzen von A berechnet. Nutzen Sie diese Idee, um A^k für beliebige Exponenten k schnell zu bestimmen.

Aufgabe 10.5

6 Zusatzpunkte

Gegeben sei ein minimaler Spannbaum T eines gewichteten Graphen $G = (V, E)$ als verkettete Liste von Kanten. Wir reduzieren das Gewicht einer Kante $e \in E$ von $w(e)$ auf $w'(e)$. Geben Sie einen Algorithmus an, der als Eingabe den Graphen G, den Spannbaum T und die Kante e erhält und in Zeit $O(|V|)$ einen minimalen Spannbaum für den Graphen G mit der modifizierten Gewichtsfunktion berechnet.