Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13

Probeklausur

Bitte beachten Sie folgende Hinweise: Unter Prüfungsbedingungen hätten Sie 90 Minuten Zeit, diese Klausur zu bearbeiten. Die Probeklausur hat keinerlei Einfluss auf die Prüfungszulassung oder die endgültige Note. Die Besprechung findet am 15.01.2013 in der Vorlesung statt.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Seien M und N nichtleere Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass f surjektiv ist?

(I) $\exists x \in M\, \forall y \in N\colon f(x) = y$

(II) $\forall y \in N\, \exists x \in M\colon f(x) = y$

(III) $\forall x \in M\, \exists y \in N\colon f(x) = y$

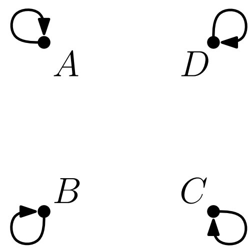
(IV) $\forall y \in N\colon (\forall x \in M\colon f(x) \neq y) \Longrightarrow y \neq y$

(V) $\neg\, \exists y \in N\, \forall x \in M\colon f(x) \neq y$

(VI) $\forall y \in N\, \neg\, \forall x \in M\colon f(x) \neq y$

(c) Seien M und N nichtleere endliche Mengen und $f\colon M \to N$ eine surjektive Funktion. Zeigen Sie, dass dann $|M| \geq |N|$ gilt.

(d) Sei $M = \{A, B, C, D\}$ und $R \subseteq M \times M$ die unten schematisch dargestellte Relation auf M. Geben Sie mit Begründung an, ob R reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.



(e) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Wie viele symmetrische und gleichzeitig antisymmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

(a) Benennen Sie die fünf Komponenten, aus denen ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) besteht. Geben Sie bei Funktionen und Relationen stets den Definitions- und den Bildbereich an.

(b) Ist jede Untermenge $L' \subseteq L$ einer regulären Sprache L stets regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

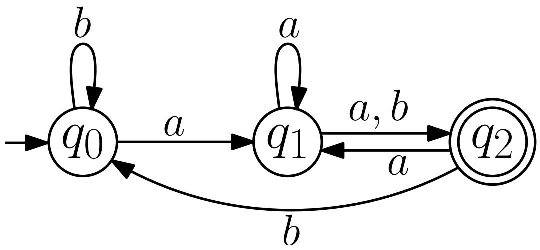
(c) Geben Sie das Pumping-Lemma an.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Gibt es einen DFA, der die Sprache $L = \{a^i b^j : i, j \geq 1\}$ entscheidet und genau einen akzeptierenden Zustand besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(e) Sei $L = \{w \in \Sigma^+ : \big| |w|_a - |w|_b \big| \leq 1\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Sei $L = \{w_1 \dots w_n \in \Sigma^+ : \big| |\hat{w}|_a - |\hat{w}|_b \big| \leq 1 \text{ für alle } \hat{w} = w_1 \dots w_m \text{ mit } m \in \{1, \dots, n\}\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

(g) Welche Sprache entscheidet der unten abgebildete NFA? Geben Sie einen DFA an, der dieselbe Sprache entscheidet.



(h) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ enthält nicht die Zeichenfolge 00 oder 11}\}$$

erzeugt.

(i) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, die die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* : \text{Die Anzahl der 1en in } w \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

erzeugt.

(j) Wie viele NFAs mit Startzustand q_0 kann man auf der Zustandsmenge $Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{1, \dots, m\}$ definieren?

Aufgabe 3

(a) Geben Sie für die Strukturen $S_1 = (\mathbb{Z}, \star)$ mit $x \star y = 2x + y$ und $S_2 = (\mathbb{R}^2, \bullet)$ mit $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = (x_1, y_2)$ mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

(b) Führen Sie den euklidischen Algorithmus für die Zahlen $a = 35$ und $b = 11$ aus.

(c) Bestimmen Sie das Inverse von $[\![11]\!]_{35}$ in $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}, \odot_{35})$.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \bmod 11$ und $x \equiv 10 \bmod 35$.

Aufgabe 4

(a) In einem Staat mit Zweiparteiensystem finden Wahlen statt. Bei einer Erhebung am Wahllokal fragt ein Journalist vier miteinander befreundete Wähler, A, B, C und D, wie sie gewählt haben.

- A sagt: „Wenn B Partei 1 gewählt hat, dann auch C und D.“
- B sagt: „A hat nicht Partei 1 gewählt, aber D.“
- C sagt: „B hat genau dann Partei 2 gewählt, wenn A Partei 1 gewählt hat.“
- D sagt: „Wenn C Partei 1 gewählt hat, so hat A Partei 2 gewählt oder B Partei 1.“

Geben Sie eine aussagenlogische Formel φ an, die die Aussagen von A, B, C und D modelliert. Wen haben A, B, C und D jeweils gewählt? Geben Sie gegebenenfalls alle möglichen Ergebnisse an.

(b) Es bezeichne AL^+ die kleinste Teilsprache von AL mit den folgenden drei Eigenschaften:

- Für jede Aussagenvariable $x \in \mathrm{AV}$ gilt $x \in \mathrm{AL}^+$.
- Ist $\varphi \in \mathrm{AL}^+$ eine aussagenlogische Formel, dann gilt auch $(\varphi \vee \mathbf{0}) \in \mathrm{AL}^+$ und $(\varphi \wedge \mathbf{1}) \in \mathrm{AL}^+$.
- Sind $\varphi_1 \in \mathrm{AL}^+$ und $\varphi_2 \in \mathrm{AL}^+$ zwei aussagenlogische Formeln, dann gilt auch $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathrm{AL}^+$ und $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \mathrm{AL}^+$.

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel $\varphi \in \mathrm{AL}^+$ erfüllbar ist.

(c) Entscheiden Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob sie erfüllbar, gültig oder unerfüllbar sind.

- $\big(x_1 \leftrightarrow (\mathbf{1} \rightarrow x_1)\big)$
- $\big(x_1 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow \mathbf{0})\big)$
- $\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \leftrightarrow x_{2i})$ für $n \geq 2$

(d) Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln, gegeben durch

$$\varphi_n = \begin{cases} (x_n \vee x_{n+1}) & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ (x_n \rightarrow \neg\, x_{n+1}) & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Geben Sie eine Bewertung der Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ an, die φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.