Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 04.12.2012, 14:00 Uhr

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

2+4 Punkte

Wir betrachten Aussagen über den Grundaussagen $A_1, A_2, \ldots$ und definieren folgende rekursive Funktion f: Für eine Grundaussage A_i setzen wir $f(A_i) = 0$. Sind B und C zwei Aussagen über den Grundaussagen $A_1, A_2, \ldots$, dann definieren wir $f(B \wedge C) = f(B) + f(C)$, $f(B \vee C) = f(B) + f(C) - 1$ und $f(\neg B) = f(B) + 1$.

(a) Was gibt der Wert $f(B)$ für eine Aussage B über den Grundaussagen $A_1, A_2, \ldots$ an?

(b) Beweisen Sie Ihre Behauptung mittels struktureller Induktion.

Aufgabe 8.2

6 Punkte

Gegeben seien ein DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, 1, F)$ mit $Q = \{1, \ldots, n\}$ und eine ganze Zahl $K \geq 0$. Mit $L_K(M) = \{w \in L(M) : |w| = K\}$ bezeichnen wir die Wörter der Sprache $L(M)$ der Länge K. Zeigen Sie, analog zum Beweis von Lemma 3.15, mittels dynamischer Programmierung, dass es einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L_K(M)$ gibt. Argumentieren Sie nicht über die Endlichkeit von $L_K(M)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Sprachen $S^k_{i,j} = \{w \in \Sigma^* : |w| = k \text{ und } \delta^*(i, w) = j\}$.

Aufgabe 8.3

3+3+3 Punkte + 3 Zusatzpunkte

(a) Wir betrachten die Relation $\sim$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$A \sim B \iff A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig}.$$

Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cantorsche Paarungsfunktion $g \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch

$$g(x, y) = \frac{(x + y - 2) \cdot (x + y - 1)}{2} + y\,,$$

bijektiv ist.

Hinweis: Nutzen Sie die alternative Darstellung $g(x, y) = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$.

(c) Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $A \times B$ zweier abzählbar unendlicher Mengen A und B abzählbar unendlich ist.

(d) Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch die Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 8.4

3 Punkte

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip.