Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 06.11.2012, 14:00 Uhr

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

3+3 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} i$.

Aufgabe 4.2

2+2+2 Punkte + 2 Zusatzpunkte

Wir betrachten die Grammatiken $G_1 = (\{0,1\}, \{S_1, A_1, B_1\}, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\{0,1\}, \{S_2, A_2, B_2\}, S_2, P_2)$, wobei P_1 die Ableitungsregeln

$$S_1 \to \varepsilon\,, 0A_1\,, 1A_1, \quad A_1 \to 0B_1, \quad B_1 \to \varepsilon\,, 0A_1\,, 1A_1$$

und P_2 die Ableitungsregeln

$$S_2 \to \varepsilon\,, 1A_2, \quad A_2 \to \varepsilon\,, 0B_2\,, 1B_2, \quad B_2 \to 1A_2$$

enthalte.

(a) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache $L(G_1) \cup L(G_2)$ an.

(b) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache $L(G_1) \cap L(G_2)$ an.

(c) Gegeben seien zwei beliebige Grammatiken $G_3 = (\Sigma, V_3, S_3, P_3)$ und $G_4 = (\Sigma, V_4, S_4, P_4)$ mit $V_3 \cap V_4 = \emptyset$. Geben Sie eine Grammatik G an, die die Sprache $L(G_3) \cup L(G_4)$ erzeugt.

(d) Gegeben seien zwei beliebige reguläre Grammatiken $G_3 = (\Sigma, V_3, S_3, P_3)$ und $G_4 = (\Sigma, V_4, S_4, P_4)$ mit $V_3 \cap V_4 = \emptyset$ und mit $L(G_3) \cap L(G_4) \neq \emptyset$. Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, die die Sprache $L(G_3) \cap L(G_4)$ erzeugt.

Aufgabe 4.3

3+3 Punkte

(a) Geben Sie die durch die Grammatik $G = (\{a,b\}, \{S, A, B\}, S, P)$ definierte Sprache L an. P enthalte dabei die folgenden Ableitungsregeln:

$$S \to A, \quad A \to aA\,, aBa, \quad B \to aB\,, b$$

Geben Sie ohne Begründung an, ob G eine reguläre Grammatik oder L eine reguläre Sprache ist.

(b) Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die die Sprache

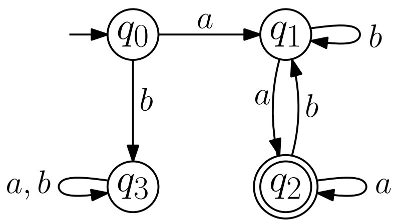
$$L = \left\{w \in \{a,b\}^* \,:\, |w| \geq 2 \text{ und das zweite Zeichen von } w \text{ ist } b\right\}$$

erzeugt.

Aufgabe 4.4

3+3 Zusatzpunkte

(a) Geben Sie die Sprache L an, die der folgende DFA entscheidet. Eine kurze Begründung anstelle eines Beweises genügt.



(b) Geben Sie einen DFA an, der die folgende Sprache L entscheidet.

$$L = \big\{ w \in \{0, \ldots, 9\}^* \;:\; w \text{ ist Dezimaldarstellung einer durch 5 teilbaren Zahl } n \in \{100, \ldots, 200\} \big\}$$

Aufgabe 4.5

3+3 Zusatzpunkte

(a) Sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Das Beweisprinzip der *verallgemeinerten vollständigen Induktion* besagt: Gilt $A(k)$ für eine feste natürliche Zahl k und folgt für jede natürliche Zahl $n \geq k$ die Aussage $A(n+1)$ aus der Gültigkeit der Aussagen $A(k), \ldots, A(n)$, dann gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$.

Beweisen Sie, dass dieses Prinzip äquivalent zu der aus der Vorlesung bekannten vollständigen Induktion ist.

(b) Beweisen Sie mittels verallgemeinerter vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.