Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 30.10.2012, 14:00 Uhr

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

4 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0\,, \\ 1 & \text{falls } n = 1\,, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $2 \cdot f(n-1) > f(n) > 2 \cdot f(n-2)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt.

Aufgabe 3.2

3+3 Punkte

(a) Geben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren wieder.

(I) Für jede reelle Zahl x gilt: Wenn x rational ist, dann auch $\sqrt{x}$.

(II) Jede natürliche Zahl besitzt endlich viele Vorgänger und unendlich viele Nachfolger.

(III) Für manche natürliche Zahlen $n \geq 3$ und ganze Zahlen x, y und z gilt $x^n + y^n = z^n$.

(b) Negieren Sie die Aussagen aus Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3.3

3+3 Punkte + 4 Zusatzpunkte

Seien M und N nichtleere Mengen und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist S eine Äquivalenzrelation auf N, dann ist durch $x\,R\,y \iff f(x)\,S\,f(y)$ eine Äquivalenzrelation R auf M definiert.

(b) Ist R eine Äquivalenzrelation auf M und ist f bijektiv, dann ist durch

$$y_1\,S\,y_2 \iff \exists\, x_1,\, x_2 \in M\colon y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2) \text{ und } x_1\,R\,x_2$$

eine Äquivalenzrelation S auf N definiert.

(c) An welchen Stellen im Beweis von Aufgabenteil (b) werden die Surjektivität bzw. die Injektivität von f benötigt? Geben Sie für den Fall, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist, und für den Fall, dass f surjektiv, aber nicht injektiv ist, jeweils ein Gegenbeispiel zu der Behauptung aus Aufgabenteil (b) an.

Aufgabe 3.4

4+4 Punkte

(a) Beschreiben Sie für diejenigen Relationen aus Aufgabe 2.4, bei denen es sich um Äquivalenzrelationen handelt, die zugehörigen Äquivalenzklassen.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Äquivalenzklassen. Vereinfachen Sie die Schreibweise dabei so weit wie möglich. Schreiben Sie zum Beispiel $[\![1]\!]$ statt $[\![7]\!]$ für die Äquivalenzklasse $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ der Relation $\equiv_3$.

(I) $[\![16]\!] \oplus_{12} [\![9]\!]$ (II) $[\![23]\!] \odot_{256} [\![42]\!]$ (III) $[\![3]\!]^{2012} = \underbrace{[\![3]\!] \odot_9 \ldots \odot_9 [\![3]\!]}_{\text{2012 Faktoren}}$ in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

Aufgabe 3.5

6 Zusatzpunkte

Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Beweisen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion. Ist $M \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ eine Menge mit $|M| \geq n + 1$ Elementen, dann besitzt M zwei Elemente $a \neq b$, sodass b ein Vielfaches von a ist.