Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 23.10.2012, 14:00 Uhr

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

2+2 Punkte

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei gegeben durch $T(1) = 1$ und $T(n) = T(n-1)+n$ für $n \geq 2$. Es gilt $T(n) \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = \sum_{i=1}^n i^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.2

3+2+1+2 Punkte

Auch wenn wir es nicht explizit erwähnen, so gehört zu einer vollständigen Lösung einer Übungsaufgabe auch immer ein Beweis der aufgestellten Behauptungen. Es genügt also zum Beispiel in Teilaufgabe (a) nicht zu sagen, dass die Abbildung f_λ injektiv ist. Es sollte auch ein Beweis dieser Behauptung angegeben werden. Sagen Sie andererseits, dass die Abbildung f_λ nicht injektiv ist, so sollten Sie dies durch ein Gegenbeispiel belegen.

(a) Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

 (I) $f_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$

 (II) $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen M

 (III) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ an.

(c) Seien $f\colon N \to P$ und $g\colon M \to N$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Verknüpfung $f \circ g\colon M \to P$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ eine Abbildung ist.

(d) Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ mit $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$?

Aufgabe 2.3

2+2 Punkte

Für zwei Mengen M und N bezeichne N^M die Menge aller Abbildungen von M nach N.

Seien M und N nichtleere endliche Mengen.

(a) Bestimmen Sie $|N^M|$.

 Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a) die aus der Vorlesung bekannte Identität $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

 Hinweis: Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen N^M und $\mathcal{P}(M)$ für eine geeignete Menge N an.

Aufgabe 2.4

2+2+2+2 Punkte

(a) Geben Sie für die folgenden Relationen an, welche aus der Vorlesung bekannten Eigenschaften sie jeweils besitzen.

(I) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $x \, R \, y \iff x = y = 0$ oder $xy > 0$

(II) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $x \, R \, y \iff |x - y| = 1$

(III) $R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \iff x_1 y_2 = y_1 x_2$

(b) Beweisen Sie, dass die Relation $\sim$ mit

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : (\mu a = \lambda c) \land (\mu b = \lambda d)$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z}^2$ ist.

Aufgabe 2.5

6 Zusatzpunkte

Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $G = \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$ ein $2^n \times 2^n$-Gitter. Beweisen Sie die folgende Aussage: Für ein beliebiges Element $z \in G$ ist die Menge $G \setminus \{z\}$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\{(x, y), (x, y \pm 1), (x \pm 1, y)\}$.

Hinweis: Skizzieren Sie das Problem graphisch und verwenden Sie vollständige Induktion.