Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 22.01.2013, 14:00 Uhr

Übungsblatt 13

Hinweis:

Die Klausurzulassung ist unabhängig von der Bearbeitung dieses Übungsblattes. Die hier gestellten Aufgaben sind dennoch klausurrelevant.

Aufgabe 13.1

Ein klassisches Problem der diskreten Mathematik ist das *Vier-Farben-Problem*: Kann eine Landkarte derart mit vier Farben eingefärbt werden, dass benachbarte Gebiete stets unterschiedlich gefärbt sind?

Bestimmen Sie in Anlehnung an das Sudoku-Beispiel aus der Vorlesung für eine gegebene Landkarte eine aussagenlogische Formel φ, die genau dann erfüllbar ist, wenn eine Färbung der Landkarte mit höchstens vier Farben existiert. Die Formel soll dergestalt sein, dass aus jeder erfüllenden Bewertung eine gültige Färbung der Landkarte abgelesen werden kann.

Aufgabe 13.2

Zeigen Sie: Für zwei aussagenlogische Formeln φ_1, φ_2 gilt $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ genau dann, wenn $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ gültig ist.

Aufgabe 13.3

Sei $\varphi = \big(\neg(x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1)\big)$.

(a) Bestimmen Sie vermöge einer Wahrheitstafel eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform.

(b) Bestimmen Sie vermöge des ErzeugeKNF-Algorithmus aus der Vorlesung eine zu φ äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform.

Aufgabe 13.4

Sei $\varphi = (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge D) \vee B$.

Zeigen Sie vermöge des Resolutionskalküls, dass φ gültig ist.

Aufgabe 13.5

Sei $n \in \mathbb{N}$ und F eine Klauselmenge, in der nur die Aussagenvariablen $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen, mit $|K| \leq 2$ für alle $K \in F$.

Bestimmen Sie eine möglichst kleine obere Schranke für $|\mathrm{Res}^*(F)|$ und vergleichen Sie das Laufzeitverhalten des Resolution-Algorithmus aus der Vorlesung für die gegebene Klasse von Klauselmengen mit dem Laufzeitverhalten im allgemeinen Fall.

Aufgabe 13.6

(Zusatzaufgabe)

Sei M eine Menge mit $|M| = 6$ und R eine symmetrische Relation auf M. Zeigen Sie, dass es eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $|M'| = 3$ gibt, so dass entweder $x \mathrel{R} y$ für alle $x, y \in M'$ oder $x \not{R}\, y$ für alle $x, y \in M'$ gilt.

Hinweis: Versuchen Sie, das Schubfachprinzip geeignet anzuwenden.