Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 08.01.2013, 14:00 Uhr

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1

4+4 Punkte

Für zwei Mengen A und B ist die symmetrische Differenz von A und B definiert als $A \mathbin{\Delta} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(a) Für gegebene Mengen M und $A_1, \dots, A_n \subseteq M$ setzen wir $B_1 = A_1$ und $B_k = B_{k-1} \mathbin{\Delta} A_k$ für $k = 2, \dots, n$. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass

$$x \in B_k \iff |\{i \in \{1, \dots, k\} : x \in A_i\}| \text{ ist ungerade}$$

für alle $x \in M$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ für jede Menge M eine abelsche Gruppe ist.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Kommutativität und zeigen Sie dann, dass $(A \mathbin{\Delta} B) \mathbin{\Delta} C = (B \mathbin{\Delta} C) \mathbin{\Delta} A$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ gilt.

Aufgabe 11.2

4 Punkte

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass dann $a \cdot (-1) = -a$ für alle $a \in R$ gilt.

Hinweis: Diese Eigenschaft gilt für beliebige Ringe mit Einselement, aber für Körper können Sie Aussagen aus der Vorlesung wiederverwenden.

Aufgabe 11.3

3+3 Punkte

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 5 \bmod 17$ und $x \equiv 3 \bmod 13$.

(b) Ein Kartenspiel, bestehend aus 56 unterschiedlichen Karten, wird in 7 Zeilen mit je 8 Spalten offen ausgelegt (siehe Abbildung 1a). Nun wird ein Zuschauer gebeten, sich eine der Karten zu merken und zu verraten, in welcher Spalte seine Karte liegt. Anschließend werden die Karten wieder eingesammelt, sodass sie sich wieder in derselben Reihenfolge befinden wie vor dem Auslegen. Nun wird das Kartenspiel in 8 Zeilen mit je 7 Spalten ausgelegt (siehe Abbildung 1b) und der Zuschauer soll wieder angeben, in welcher Spalte sich seine Karte befindet.

Rekonstruieren Sie aus diesen beiden Informationen, welche Karte sich der Zuschauer gemerkt hat.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56

(a) 7 Zeilen mit je 8 Spalten

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56

(b) 8 Zeilen mit je 7 Spalten

Abbildung 1: Anordnung der ausgelegten Karten

Aufgabe 11.4

3+3 Punkte

Wir betrachten die Zahlen $a = 1.231.940$, $b = 9.935$ und $n = 3.999.831$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von n und a.

(b) Wir betrachten den Restklassenring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus_n, \odot_n)$. Bestimmen Sie eine ganze Zahl x mit $[\![a]\!] \odot_n [\![x]\!] = [\![b]\!]$.
Hinweis: Nutzen Sie Ideen aus den Beweisen von Theorem 4.26 und Lemma 4.30 und überlegen Sie sich, wie b und $\mathrm{ggT}(n, a)$ speziell in dieser Aufgabe zueinander in Beziehung stehen.

Aufgabe 11.5

6 Zusatzpunkte

Bestimmen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ mit $17x \equiv 4 \bmod 23$ und $23x \equiv 15 \bmod 17$.

Hinweis: Nutzen Sie das mehrmalige Vorkommen von 17 und 23, um sich Arbeit zu ersparen.