

## Übungsblatt 10

### Aufgabe 10.1

4+4 Punkte

Geben Sie für die folgenden Strukturen mit Begründung an, ob es sich um eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe handelt und ob die Verknüpfung kommutativ ist.

- (a)  $(\mathbb{Z}, *)$  mit  $x * y = x + y - 1$
- (b)  $(\{0, 1\}^n, \bullet)$  mit  $(a_1, \dots, a_n) \bullet (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$

### Aufgabe 10.2

2+2+2 Punkte

Seien  $M$  eine nichtleere Menge und  $\star$  eine Verknüpfung auf  $M$ . Wir definieren auf  $\mathcal{P}(M)$  eine Verknüpfung  $\circ$  durch  $A \circ B = \{a \star b : a \in A \wedge b \in B\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \circ)$  eine Halbgruppe ist, wenn  $(M, \star)$  eine Halbgruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $(\mathcal{P}(M), \circ)$  ein Monoid ist, wenn  $(M, \star)$  ein Monoid ist.
- (c) Ist  $(\mathcal{P}(M), \circ)$  stets eine Gruppe, wenn  $(M, \star)$  eine Gruppe ist?

### Aufgabe 10.3

2+2+2 Punkte

Wir betrachten die Strukturen  $S_1 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \odot_4)$  und  $S_2 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \odot_5)$ .

- (a) Geben Sie die Verknüpfungstabellen von  $S_1$  und  $S_2$  an.
- (b) Welche Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes) besitzen  $S_1$  und  $S_2$  jeweils?
- (c) Geben Sie für  $S_1$  und  $S_2$  die Menge der invertierbaren Elemente an.

### Aufgabe 10.4

4 Punkte

Sei  $(M, \circ)$  ein Monoid. Zeigen Sie, dass die Struktur  $(N, \star)$  mit  $N = \{x \in M : x \text{ ist invertierbar}\}$  und der Verknüpfung  $\star: N \times N \rightarrow N$ , gegeben durch  $x \star y = x \circ y$ , eine Gruppe ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass  $\star$  tatsächlich eine Verknüpfung auf  $N$  ist.

### Aufgabe 10.5

4 Zusatzpunkte

Seien  $(M, \circ)$  eine Halbgruppe und  $e \in M$  ein Element von  $M$  mit der Eigenschaft, dass  $e \circ x = x$  für alle  $x \in M$  gilt und für jedes  $y \in M$  ein  $x \in M$  mit  $x \circ y = e$  existiert. Zeigen Sie, dass  $(M, \circ)$  eine Gruppe ist.