Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 15.12.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

6 Punkte

Wir betrachten einen stochastischen Prozess $X_0, X_1, X_2, \ldots$ mit zwei Zuständen 0 und 1. Statt einer Übergangsmatrix P gibt es zwei Übergangsmatrizen P^{u} und P^{g}. Wenn k ungerade ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, im Schritt von X_k zu X_{k+1} von Zustand i in Zustand j zu wechseln, durch P^{u}_{ij} gegeben, ansonsten durch P^{g}_{ij}.

Erklären Sie, warum dieses Modell keine homogene Markow-Kette mit Zuständen 0 und 1 beschreibt. Geben Sie eine äquivalente homogene Markow-Kette (mit einem größeren Zustandsraum) an.

Aufgabe 9.2

3+3 Punkte

Wir betrachten folgendes Spiel: Ein Spieler besitzt 1 € und möchte durch eine Reihe von Glücksspielen, bei denen er, unabhängig von vorangegangenen Spielen, eine Gewinnchance von 50% besitzt, sein Vermögen auf $n \geq 2$ Euro erhöhen. Bei jedem Spiel muss er einen ganzzahligen Betrag $k \geq 1$ setzen. Gewinnt er, erhält er $2k$ Euro zurück. Verliert er, dann bekommt er nichts zurück. Wir gehen davon aus, dass der Spieler höchstens so viel setzt, dass er im Gewinnfall höchstens n Euro besitzt.

(a) Sei $n = 10$. Wir gehen davon aus, dass der Spieler immer so viel wie möglich setzt, d.h. er setzt sein ganzes Vermögen, falls er höchstens 5 Euro besitzt, und ansonsten gerade so viel, dass er im Gewinnfall genau 10 Euro besitzt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler am Ende 10 Euro besitzt.

(b) Sei n beliebig. Wir betrachten eine beliebige Strategie, bei der bei gleichem Vermögen immer derselbe Betrag gesetzt wird (Homogenität).

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler am Ende n Euro besitzt.

Aufgabe 9.3

6 Punkte

Verallgemeinern Sie den randomisierten Algorithmus für 3-SAT auf k-SAT. Was ist die erwartete Laufzeit des Algorithmus in Abhängigkeit von k?

Aufgabe 9.4

3+3 Punkte

Wir betrachten ungerichtete einfache Graphen. Eine k-Färbung eines Graphen ist eine Abbildung der Knotenmenge des Graphen in die Menge $\{1, \ldots, k\}$. Ein Graph G heißt k-färbbar, wenn es eine k-Färbung von G gibt, die adjazenten Knoten stets unterschiedliche Farben zuweist.

Sei G ein 3-färbbarer Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten.

(a) Zeigen Sie, dass es eine 2-Färbung von G gibt, sodass G kein monochromatisches Dreieck, also ein Dreieck, dessen Knoten alle dieselbe Farbe besitzen, enthält. Zeigen Sie außerdem, dass sich jede beliebige 2-Färbung von G in höchstens $|V|/2$ Knoten von einer solchen Färbung unterscheidet.

(b) Um eine Färbung wie in Aufgabenteil (a) zu erhalten, betrachten wir folgenden Algorithmus:

(1) Beginne mit einer beliebigen 2-Färbung von G.
(2) Gibt es kein monochromatisches Dreieck, dann gib die aktuelle 2-Färbung aus.
(3) Wähle ein beliebiges monochromatisches Dreieck.
(4) Wähle uniform zufällig einen seiner Knoten und färbe diesen um.
(5) Gehe zu (2).

Zeigen Sie, dass die erwartete Anzahl Schritte, die der Algorithmus benötigt, $O(\sqrt{2}^n)$ ist.