Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 01.12.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

6 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige 0-1-Zufallsvariablen und sei $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ihre Summe. Oft kennt man den Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}[X]$ nicht, sondern nur Abschätzungen $0 < \mu_u \leq \mu \leq \mu_o$. Zeigen Sie, dass die Chernoff-Schranke folgende Monotonie-Eigenschaften besitzt:

$$\mathbf{Pr}(X \geq (1+\delta) \cdot \mu_o) \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right)^{\mu_o} \text{ für alle } \delta > 0 \text{ und}$$
$$\mathbf{Pr}(X \leq (1-\delta) \cdot \mu_u) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^{\mu_u} \text{ für alle } 0 < \delta < 1\,.$$

Aufgabe 7.2

6 Punkte

Ein Kasino testet einen neuen Typen von Spielautomaten. Für jedes Spiel muss der Spieler eine 1€-Münze einwerfen. Der Automat soll laut Herstellerangaben mit Wahrscheinlichkeit $4/25$ Münzen im Wert von 3 €, mit Wahrscheinlichkeit $1/200$ Münzen im Wert von 100 € und sonst keine Münze ausspucken. Die Spiele seien unabhängig voneinander.

Das Kasino stellte überrascht fest, dass die Maschinen während den ersten $n = 10^6$ Spielen insgesamt $v =$ 10.000 Euro verloren hatten. Leiten Sie eine Chernoff-Schranke für dieses Ereignis her.

Hinweis: Zur Bestimmung geeigneter Parameter für Ihre Schranke bieten sich zum Beispiel Taschenrechner und/oder Funktionsplotter an.

Aufgabe 7.3

6 Punkte

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen, die uniform zufällig einen der Werte 0, 1 oder 2 annehmen. Wir betrachten die Summe $X = \sum_{i=1}^n X_i$ dieser Zufallsgrößen. Leiten Sie für $0 < \delta < 1$ eine Chernoff-Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}(X \geq (1+\delta) \cdot \mu)$ her, wobei $\mu = \mathbf{E}[X]$ der Erwartungswert von X ist.

Aufgabe 7.4

6 Punkte

Wir wollen n Jobs auf m Maschinen verteilen, wobei n ein ganzzahliges Vielfaches von m sei. Auf jeder Maschine werden die Jobs nacheinander abgearbeitet, die Maschinen selbst laufen parallel. Die Abarbeitungszeit jedes Jobs betrage 1 mit Wahrscheinlichkeit p und $k > 1$ sonst, unabhängig von den anderen Jobs. Wir weisen uniform zufällig jeder Maschine exakt n/m Jobs zu.

Leiten Sie unter Verwendung von Chernoff-Schranken obere und untere Schranken für die Dauer, bis alle Jobs abgearbeitet sind, her, die mit hoher Wahrscheinlichkeit gelten.