

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 6.1

6 Punkte

Zeigen Sie, dass für jede Matrix  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt:

$$\max_i \min_j M_{ij} \leq \min_j \max_i M_{ij}.$$

### Aufgabe 6.2

6 Punkte

Zeigen Sie, dass es für jeden deterministischen Algorithmus zur Auswertung eines Spielbaums der Form  $T_k$  eine schlechte Instanz gibt, also eine Instanz, bei der der Algorithmus alle  $2^{2k}$  Blätter betrachten muss.

### Aufgabe 6.3

6 Punkte

Wir betrachten einen vollständigen ternären Baum, d.h. einen Baum mit Verzweigungsgrad 3, der Höhe  $h$  als Spielbaum. Jedes Blatt besitzt einen Booleschen Wert (0 oder 1) und jeder innere Knoten liefert den Wert zurück, den die Mehrheit seiner Söhne zurückliefert.

Nun betrachten wir einen rekursiven randomisierten Algorithmus, der, beginnend mit der Wurzel, einen gegebenen Spielbaum wie folgt auswertet: Um den Wert eines Knotens zu bestimmen, wähle zunächst uniform zufällig zwei seiner drei Söhne und werte diese aus. Stimmen deren Werte überein, dann liefere diesen Wert zurück. Ansonsten bestimme den Wert des dritten Sohnes und liefere diesen zurück.

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus für jede Instanz im Erwartungswert höchstens  $n^{0.9}$  Blätter betrachtet, wenn  $n$  die Anzahl der Blätter ist.

### Aufgabe 6.4

6 Punkte

Leiten Sie mit Hilfe von Yaos Minimax-Prinzip eine untere Schranke für die erwartete Laufzeit jedes vergleichsbasierten Las-Vegas-Algorithmus zum Sortieren von  $n$  Zahlen her.

*Hinweis:* Orientieren Sie sich dabei an der Herleitung der unteren Schranke für die Laufzeit jedes deterministischen vergleichsbasierten Sortieralgorithmus.