Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 17.11.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

2+2+2 Punkte

(a) Geben Sie eine Strategie an, um mit Hilfe von Münzwürfen uniform zufällig eine Zahl aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auszuwählen. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl an Münzwürfen, die Sie dafür benötigen.

(b) Wie viele Münzwürfe benötigt Ihre Strategie im Worst-Case? Betrachten Sie den Fall, dass n eine Zweierpotenz ist, gesondert.

(c) Bei einem Spiel mit 19 Spielern soll mit Hilfe eines fairen Würfels uniform zufällig ein Startspieler ausgewürfelt werden. Geben Sie hierfür eine Strategie an, bei der im Erwartungswert weniger als 3,5 Würfe benötigt werden.

Aufgabe 5.2

2+4 Punkte

(a) Gegeben sei eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ „Kopf" und sonst „Zahl" zeigt. Wir wollen mit dieser Münze den Wurf einer fairen Münze simulieren. Geben Sie eine Strategie an, die im Erwartungswert $1/(p(1-p))$ viele Münzwürfe benötigt und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „Kopf" und sonst „Zahl" ausgibt.

(b) Geben Sie eine Methode an, die mit Hilfe von (fairen) Münzwürfen eine uniform zufällige Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ ausgibt. Zeigen Sie, dass jede Methode dazu $\Omega(n \log n)$ Münzwürfe benötigt.

Aufgabe 5.3

4+3 Punkte

Ein s-t-Cut in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $E' \subseteq E$ von Kanten, für die gilt, dass die Knoten s und t in $G' = (V, E \setminus E')$ nicht durch einen Weg miteinander verbunden sind. Wir wollen einen minimalen s-t-Cut bestimmen, also einen s-t-Cut E', für den $|E'|$ minimal ist. Dazu passen wir den Contract-Algorithmus aus der Vorlesung so an, dass er niemals eine Kante $\{u, v\}$ kontrahiert, für die $s \in L_u$ und $t \in L_v$ gilt. Hierbei seien L_u und L_v die Label von u und v, die angeben, aus welchen ursprünglichen Knoten sie durch Verschmelzungen hervorgegangen sind.

(a) Geben Sie einen Graphen sowie Knoten s und t an, für die die Wahrscheinlichkeit, dass der modifizierte Contract-Algorithmus einen minimalen s-t-Cut findet, exponentiell klein in der Größe des Graphen ist.

(b) In Aufgabe 1.4 haben Sie gezeigt, dass es höchstens $\binom{n}{2}$ verschiedene Min-Cuts gibt. Geben Sie einen Graphen, der für ausgewählte Knoten s und t exponentiell viele minimale s-t-Cuts besitzt.

Aufgabe 5.4

2+3 Punkte

(a) Die Klasse $\mathcal{BPP}$ enthält alle Entscheidungsprobleme, für die es einen Monte-Carlo-Algorithmus mit polynomieller Laufzeit und Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens $1/4$ gibt. Zeigen Sie, dass diese Bedingung äquivalent dazu ist, dass es einen Monte-Carlo-Algorithmus mit polynomieller Laufzeit und Fehlerwahrscheinlichkeit von $O(1/|x|)$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co-}\mathcal{RP}$ gilt.