Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 10.11.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

6 Punkte

Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Geben Sie eine Zufallsvariable an, deren j-te Momente für $j = 1, \ldots, k$ existieren, aber für die kein $(k+1)$-tes Moment existiert. Zeigen Sie, dass Ihre Zufallsvariable beide Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 4.2

4 Punkte

Wir wollen zeigen, dass die Markow-Ungleichung nicht verbessert werden kann. Geben Sie dazu für eine feste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable X an, die nur nichtnegative Werte annimmt und für die gilt: $\mathbf{Pr}(X \geq k \cdot \mathbf{E}[X]) = 1/k$.

Aufgabe 4.3

6 Punkte

In Aufgabe 4.2 haben wir gesehen, dass die Markow-Ungleichung optimal ist, wenn wir keine weiteren Informationen über die Zufallsvariable besitzen. Wir betrachten nun eine Zufallsvariable X, deren l-te Momente die folgende Gestalt besitzen:

$$\mathbf{E}\left[X^\ell\right] = 2^{\ell^2-1} \cdot \left(\mathbf{E}[X]\right)^\ell .$$

Beweisen Sie die folgende Ungleichung, die stärker ist als die Markow-Ungleichung angewendet auf X:

$$\mathbf{Pr}(X \geq k \cdot \mathbf{E}[X]) = \left(\frac{1}{k}\right)^{\Omega(\log k)} .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Markow-Ungleichung.

Aufgabe 4.4

8 Punkte

Verallgemeinern Sie den randomisierten Algorithmus aus der Vorlesung zum Bestimmen des Medians, um für eine beliebige Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$ das k-t größte Element in einem Feld von n paarweise verschiedenen Zahlen zu bestimmen. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist und schätzen Sie seine Laufzeit nach oben ab.