Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 03.11.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

4 Punkte

Wir betrachten folgende Variante des *Coupon Collector Problems*: Jede Cornflakes-Packung enthält einen von $k \cdot n$ verschiedenen Coupons. Die Coupons 1 bis k bilden ein k-Tupel, die Coupons $k+1$ bis $2k$ bilden ein k-Tupel, und so weiter. Sobald man von jedem k-Tupel mindestens einen Coupon besitzt, gewinnt man den ausgeschriebenen Preis. Wie viele Packungen muss man im Erwartungswert kaufen, um den Preis zu gewinnen? Wir nehmen dazu an, dass beim Befüllen jeder einzelnen Packung der Coupon uniform zufällig und unabhängig von den anderen Packungen aus den $k \cdot n$ zur Verfügung stehenden Coupons ausgewählt wurde.

Aufgabe 3.2

2+4 Punkte

Wir werfen n-mal hintereinander eine faire Münze und erhalten eine Sequenz $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in \{Z, K\}$. Wir nennen $x_i, \ldots, x_{i+l-1}$ eine Serie der Länge l, falls $x_i = \ldots = x_{i+l-1}$ gilt.

(a) Sei n eine Zweierpotenz. Bestimmen Sie für jede Zahl $l \in \{1, \ldots, n\}$ die erwartete Anzahl an Serien der Länge l und zeigen Sie, dass diese für $l = \log_2 n + 1$ gleich $1 - o(1)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es mit Wahrscheinlichkeit $O(1/n^2)$ keine Serie der Länge $l = \lfloor \log_2 n - 2\log_2 \log_2 n \rfloor$ gibt.

Hinweis: Zerlegen Sie die Sequenz in paarweise disjunkte zusammenhängende Blöcke der Größe l und nutzen Sie, dass das Auftreten von Serien in verschiedenen Blöcken unabhängig voneinander ist.

Aufgabe 3.3

3+3 Punkte

Wir wollen aus n Objekten uniform zufällig eins auswählen. Wir kennen die Anzahl n nicht und haben außerdem nicht genügend Speicher, um alle Objekte gleichzeitig betrachten zu können. Daher bekommen wir die Objekte nacheinander gezeigt und müssen uns jeweils entscheiden, ob wir das gezeigte Objekt wählen oder nicht. Haben wir bereits ein Objekt gewählt, so wird dieses durch das eben gewählte Objekt ersetzt.

(a) Wir betrachten folgende Strategie: Bekommen wir das k-te Objekt gezeigt, dann wählen wir es mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ unabhängig von den vorherigen Entscheidungen aus. Zeigen Sie, dass jedes der n Objekte mit derselben Wahrscheinlichkeit am Ende ausgewählt ist.

(b) Wir betrachten folgende Strategie: Bekommen wir das k-te Objekt gezeigt, dann wählen wir es im Fall $k = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und ansonsten mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ unabhängig von den vorherigen Entscheidungen aus. Bestimmen Sie für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass das k-te Objekt am Ende ausgewählt ist.

Aufgabe 3.4

3+3+2 Punkte

Ein Unternehmen möchte einen neuen Mitarbeiter einstellen. Auf die Stelle haben sich n Personen beworben. Jeder Bewerber i hat eine gewisse (unbekannte) Eignung $g_i \geq 0$ für die Stelle und es gibt keine zwei Bewerber, die gleichgeeignet sind. Ziel ist es, den geeignetsten Bewerber einzustellen. Dazu werden nacheinander Vorstellungsgespräche geführt, durch die man die Eignung g_i des Kandidaten mit den Eignungen g_j der bisherigen Kandidaten vergleichen kann, ohne den Wert g_i selbst feststellen zu können. Das Problem ist, dass man sich direkt nach dem Gespräch verbindlich entscheiden muss, ob man den Kandidaten einstellen möchte oder nicht. Hat man sich dagegen entschieden, kann man den nächsten Kandidaten zum Gespräch einladen.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder deterministischen Strategie Eignungen g_i gibt, für die der schlechteste Bewerber oder niemand eingestellt wird, wenn die Kandidaten in der Reihenfolge $1, \ldots, n$ zu den Gesprächen eingeladen werden.

(b) Wir nehmen an, dass die Reihenfolge, in der wir die Bewerber zu den Gesprächen einladen, eine uniform zufällige Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ ist. Geben Sie eine Strategie an, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $\Omega(1)$ die geeignetste Person einstellt.

(c) Die Zufallsvariable X beschreibe die Eignung der eingestellten Person. Sie habe den Wert 0, falls keine Person eingestellt wird. Gibt es eine Strategie, für die $\mathbf{E}[X] \geq c \cdot \max\{g_1, \ldots, g_n\}$ für eine geeignete Konstante $c > 0$ gilt, wenn die Reihenfolge der Kandidaten uniform zufällig gewählt ist?