Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 27.10.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

4 Punkte

Ein hyperaktiver Affe sitzt vor einer Tastatur mit den Zeichen „A“ bis „Z“ und tippt wahllos 1.000.000-mal Zeichen ein. Wir nehmen an, dass jedes der eingetippten Zeichen uniform zufällig und unabhängig von den anderen eingetippten Zeichen ausgewählt wurde. Wie oft taucht das Wort „BANANE“ in dieser Sequenz im Erwartungswert auf?

Aufgabe 2.2

2+2+2 Punkte

Wir betrachten die folgende rekursive Funktion:

`RandomRecursion`(l)
{
  Gib l aus.
  Wirf eine faire Münze.
  Bei „Kopf“ rufe `RandomRecursion`($l+1$) auf.
  Wirf eine faire Münze.
  Bei „Kopf“ rufe `RandomRecursion`($l+1$) auf.
}

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit terminiert `RandomRecursion`(0)?

(b) Sei $k \geq 0$ eine beliebige ganze Zahl. Wie oft gibt `RandomRecursion`(0) die Zahl k im Erwartungswert aus?

(c) Was ist die erwartete Anzahl ausgegebener Zahlen beim Aufruf von `RandomRecursion`(0)?

Aufgabe 2.3

3+3+3 Punkte

Wir betrachten die Analyse der Erfolgswahrscheinlichkeit des FastCut-Algorithmus. Dort konnten wir uns auf das Bestimmen der Wahrscheinlichkeit zurückziehen, dass es in einem vollständigen binären Baum der Höhe k einen Weg von der Wurzel zu einem der Blätter gibt, wenn jede Kante unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit q gelöscht wird. Dadurch ergab sich die Rekursionsgleichung

$$p(k) = 1 - \big(1 - \bar{q} \cdot p(k-1)\big)^2$$

für $k \geq 1$ und $p(0) = 1$, wobei $\bar{q} = 1 - q$. Für $q = 1/2$ haben wir gezeigt, dass $p(k) = \Omega(1/k)$ gilt.

(a) Zeigen Sie für $q = 1/2$, dass $p(k) = O(1/k)$ gilt.
(b) Sei $q = 1/2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $c_\varepsilon \in (0,1)$ gibt, sodass für jede natürliche Zahl k gilt: $p(k) \geq c_\varepsilon$.
(c) Sei $q = 1/2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $d_\varepsilon \in (0,1)$ gibt, sodass für jede natürliche Zahl k gilt: $p(k) \leq (d_\varepsilon)^k$.

Aufgabe 2.4

5 Punkte

Aufgabe 2.3 (a) und Aufgabe 2.3 (b) besagen, dass man die Erfolgswahrscheinlichkeit des FastCut-Algorithmus signifikant erhöhen kann, wenn man die Fehlerwahrscheinlichkeit von $q = 1/2$ auf $q = 1/2 - \varepsilon$ senken kann. Das ist zum Beispiel möglich, wenn wir bei jedem Aufruf die Anzahl der Knoten nicht um den Faktor $\sqrt{2}$, sondern um einen etwas kleineren Faktor wie zum Beispiel 4/3 verkleinern, d.h. wir setzen $t = \lceil 1 + 3n/4 \rceil$ in Zeile 5 von FastCut und ersetzen Zeile 1 durch “**if** $n := |V| \leq 7$”. Ist das eine gute Idee?