

## Übungsblatt 11

### Aufgabe 11.1

6 Punkte

Wir betrachten eine Instanz  $I$  für das Rucksackproblem mit beliebigen Gewichten  $w_1, \dots, w_n \geq 0$ , Kapazität  $b$  und Nutzenwerten  $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ . Mit  $x^*$  und  $x^{**}$  bezeichnen wir die beste und die zweitbeste Lösung für das Rucksackproblem, d.h.

$$x^* = \arg \max \{p \cdot x : x \in \{0, 1\}^n \text{ und } w \cdot x \leq b\}$$

und

$$x^{**} = \arg \max \{p \cdot x : x \in \{0, 1\}^n \text{ und } w \cdot x \leq b \text{ und } x \neq x^*\}.$$

Das *Winner-Gap*  $\Delta(I)$  definieren wir als den Nutzenunterschied beider Lösungen, d.h.

$$\Delta(I) = p \cdot x^* - p \cdot x^{**}.$$

Sei  $k$  eine Konstante. Zeigen Sie, dass es einen deterministischen Algorithmus gibt, der das Rucksackproblem für Instanzen  $I$  mit  $\Delta(I) \geq n^{-k}$  in Polynomialzeit löst.

*Hinweis:* Runden Sie die Nutzenwerte auf eine bestimmte Genauigkeit und zeigen Sie, dass die optimale Lösung dabei erhalten bleibt. Nutzen Sie aus, dass man das Rucksackproblem für Instanzen mit ganzzahligen Nutzenwerten in Zeit  $O(n^2P)$  mit  $P = \max\{p_1, \dots, p_n\}$  lösen kann. Ein Beweis für die letzte Aussage ist nicht nötig.

### Aufgabe 11.2

6 Punkte

Wir betrachten eine Instanz  $I$  für das Rucksackproblem mit beliebigen Gewichten  $w_1, \dots, w_n \geq 0$ , Kapazität  $b$  und Nutzenwerten  $p_i$ , die gemäß Dichtefunktionen  $f_i: [0, 1] \rightarrow [0, \phi]$  für ein festes  $\phi \geq 1$  gewählt werden. Wir nehmen an, dass es mindestens zwei zulässige Lösungen gibt. Zeigen Sie, dass dann für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\Pr(\Delta(I) \leq \varepsilon) \leq n\phi\varepsilon.$$

### Aufgabe 11.3

4 Punkte

Zeigen Sie, dass es einen deterministischen Polynomialzeit-Algorithmus gibt, der für die Instanzen aus Aufgabe 11.2 mit konstanter Wahrscheinlichkeit die optimale Lösung berechnet.

### Aufgabe 11.4

4 Punkte

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von Teilmengen von  $M$ . Wir ordnen uniform zufällig jedem Element  $x$  aus  $M$  ein Gewicht  $w(x) \in \{1, \dots, N\}$  zu. Das Gewicht einer Menge  $S \in \mathcal{F}$  definieren wir als

$$w(S) = \sum_{x \in S} w(x).$$

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es genau eine Menge  $S \in \mathcal{F}$  mit maximalem Gewicht  $w(S)$  gibt, mindestens  $1 - n/N$  ist.

### Aufgabe 11.5

4 Punkte

Wir betrachten die folgende Instanz für den Nemhauser-Ullmann-Algorithmus: Die Gewichte  $w_i = 2^i$  steigen exponentiell an und die Nutzenwerte sind uniform zufällig aus  $[0, 1]$  gewählt.

Bestimmen Sie empirisch für  $n = 1, \dots, 70$  den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl Pareto-optimaler Lösungen. Stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar und geben Sie eine Vermutung an, wie beide Größen von  $n$  abhängen.