Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2011/12
Abgabe: 12.01.2012 in der Vorlesung

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

6 Punkte

Wir betrachten eine Markow-Kette mit zwei Zuständen und Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

mit $p \in [0,1]$. Geben Sie einen einfachen Ausdruck für $p_{0,0}^{(t)}$ an.

Aufgabe 10.2

3+3 Punkte

Wir betrachten eine beliebige Markow-Kette und ihre Darstellung als gerichteter Graph.

(a) Zeigen Sie, dass zwei Zustände, die zur selben starken Zusammenhangskomponente gehören, entweder beide transient oder beide rekurrent sind.

(b) Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass alle starken Zusammenhangskomponenten endlich sind, folgende Aussage gilt: Ein Zustand ist genau dann transient, wenn die starke Zusammenhangskomponente, zu der er gehört, eine ausgehende Kante besitzt.

Aufgabe 10.3

2+2+2 Punkte

Wir betrachten das *Gambler's Ruin Problem* mit einer unfairen Münze: Mit Wahrscheinlichkeit p muss Spieler 1 einen Euro an Spieler 2 zahlen und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ erhält Spieler 1 einen Euro von Spieler 2. Wir gehen davon aus, dass Spieler 1 und Spieler 2 mit ℓ_1 bzw. ℓ_2 Euro starten und dass das Spiel endet, wenn einer von beiden alles verloren hat. Mit W_t bezeichnen wir den Betrag, den Spieler 2 an Spieler 1 in den ersten t Runden (abzüglich Einnahmen) gezahlt hat.

(a) Sei $p = 2/3$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{E}\left[2^{W_{t+1}}\right] = \mathbf{E}\left[2^{W_t}\right]$ gilt.

(b) Sei $p = 2/3$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 alles verliert.

(c) Bestimmen Sie für eine beliebige Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 alles verliert.

Hinweis: Betrachten Sie $\mathbf{E}\left[c^{W_t}\right]$ für eine geeignete Konstante c.

Aufgabe 10.4

6 Punkte

Eine Katze und eine Maus führen unabhängig voneinander einen *Random Walk* auf einem zusammenhängenden, ungerichteten und nicht bipartiten Graphen mit n Knoten und m Kanten durch. Sie starten zur gleichen Zeit an zwei verschiedenen Knoten und laufen in jedem Schritt zu einem uniform zufälligen Nachbarknoten. Befinden sich beide zu irgendeinem Zeitpunkt am selben Knoten, dann frisst die Katze die Maus.

Zeigen Sie, dass die erwartete Anzahl an Schritten, bis die Katze die Maus frisst, durch $O(m^2 n)$ beschränkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Markow-Kette, deren Zustände gerade die Paare (u, v) sind, wobei u die Position der Katze und v die Position der Maus beschreibt. Verwenden Sie für die Analyse Ideen aus dem Beweis der oberen Schranke für die *Cover Time*.