

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

4 Punkte

Wir werfen eine faire Münze n -mal hintereinander. Geben Sie für jede natürliche Zahl k eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die Münze während dieser Würfe $\log_2 n + k$ oft in Folge Kopf zeigt. Die Schranke soll dabei exponentiell in k fallen.

Aufgabe 1.2

6 Punkte

Ein neuer Test soll helfen, Lungenkrebs zuverlässiger zu diagnostizieren. Bei einem gesunden Menschen wird der Test nur mit Wahrscheinlichkeit von $1/100$ ein positives Ergebnis liefern (false positive), bei einem kranken Menschen wird der Test nur mit Wahrscheinlichkeit von $1/200$ ein negatives Ergebnis liefern (false negative). Wie wahrscheinlich ist es, dass eine uniform zufällig ausgewählte Person Lungenkrebs hat, wenn das Ergebnis positiv ist und bekannt ist, dass $0,2\%$ der Bevölkerung Lungenkrebs haben?

Aufgabe 1.3

4 Punkte

Wir würfeln einen fairen Würfel n -mal hintereinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme durch 6 teilbar ist?

Hinweis: Nutzen Sie eine Technik aus dem Beweis von Theorem 1.5.

Aufgabe 1.4

4 Punkte

Ein Graph kann mehrere Min-Cuts besitzen. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller Min-Cuts durch $\binom{n}{2}$ nach oben beschränkt ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Analyse des Contract-Algorithmus aus der Vorlesung.

Aufgabe 1.5

6 Punkte

Ein r -Cut ist eine Menge von Kanten eines Graphen, durch deren Entfernung der Graph in mindestens r Zusammenhangskomponenten zerfällt. Leiten Sie einen randomisierten Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen r -Cuts analog zu dem Contract-Algorithmus aus der Vorlesung her und geben Sie eine untere Schranke dafür an, dass der Algorithmus nach einem Durchlauf einen Min- r -Cut konstruiert hat.