Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Algorithmen und Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2010/11

Musterlösung Übungsblatt 9

Aufgabe 9.5

Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass alle Einträge der Matrix R positiv sind und auf der Hauptdiagonale Einsen stehen. Daher existiert genau dann ein Arbitrage-Geschäft, wenn es eine Zahl $k \in \{2, \ldots, n\}$ und Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $i_{j-1} \neq i_j$ für alle $j = 1, \ldots, k$ (wobei $i_0 := i_k$) und mit $\prod_{j=1}^{k} R_{i_{j-1}, i_j} > 1$. Nun gilt

$$1 < \prod_{j=1}^{k} R_{i_{j-1}, i_j} \iff 0 < \ln\left(\prod_{j=1}^{k} R_{i_{j-1}, i_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln(R_{i_{j-1}, i_j}) \iff 0 > \sum_{j=1}^{k} (-\ln(R_{i_{j-1}, i_j}))\,.$$

Es existiert also genau dann ein Arbitrage-Geschäft, wenn es einen negativen Kreis in dem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$, $E = \{(i, j) : i \neq j \in V\}$ und der Kantengewichtung $w \colon E \to \mathbb{R}$, $w(e) := -\ln(R_{i,j})$ für $e = \{i, j\}$ gibt. Der Floyd-Warshall-Algorithmus kann verwendet werden, um zu entscheiden, ob in diesem Graphen ein negativer Kreis vorliegt. Der Algorithmus hat eine (worst-case) Laufzeit von $O(n^3)$.