

Musterlösung Übungsblatt 8

Aufgabe 8.5

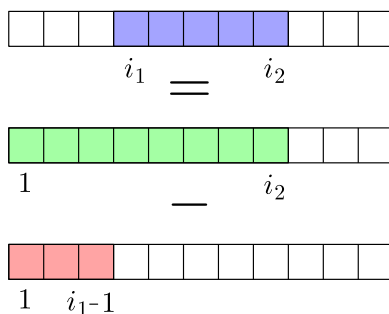
Aufgabe 8.5 findet u.a. Anwendung in der Computergraphik. Um Bilder zu stauchen, steht man oft vor dem Problem, den durchschnittlichen Farbwert aller Pixel in einem gegebenen achsenparallelen Rechteck zu bestimmen. Dazu summiert man (pro Farbkanal) alle Farbwerte auf und dividiert anschließend durch die Anzahl der Pixel des Rechtecks. Kann man die Farbwerte in konstanter Zeit aufsummieren, unabhängig von der Größe des Rechtecks, dann kann man auch den durchschnittlichen Farbwert in konstanter Zeit bestimmen. Das Anwenden von `Init` und `Sum` aus Aufgabe 8.5 lohnt sich aber nur, wenn das Ausgangsbild immer wieder gestaucht wird, und das nicht immer mit denselben Skalierungsfaktoren. Das ist zum Beispiel bei der Texturierung von 3D-Objekten der Fall (siehe isotrope Texturfilterung).

Wir betrachten zunächst das analoge 1-dimensionale Problem. Sei B ein 1-dimensionales Feld mit Einträgen $B[1], \dots, B[n]$. Nach einem Vorverarbeitungsschritt in Zeit $O(n)$ wollen wir beliebige Summen der Gestalt $\sum_{i=i_1}^{i_2} B[i]$ in konstanter Zeit berechnen können. Wegen

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} B[i] = \sum_{i=1}^{i_2} B[i] - \sum_{i=1}^{i_1-1} B[i] \quad (1)$$

genügt es, für alle Zahlen $k = 0, \dots, n$ die Summe $\sum_{i=1}^k B[i]$ zu bestimmen. Wir berechnen alle diese Summen in der `Init`-Funktion und speichern sie in einem Feld S mit den Einträgen $S[0], \dots, S[n]$ ab. Haben wir $S[k]$ für eine Zahl k berechnet, können wir in Zeit $O(1)$ den nächsten Eintrag $S[k+1]$ durch $S[k+1] = S[k] + B[k+1]$ in Zeit $O(1)$ berechnen. Die `Init`-Funktion benötigt also Zeit $O(n)$. In der `Sum`-Funktion berechnen wir $S[i_2] - S[i_1 - 1]$, was wegen Gleichung (1) gleich $\sum_{i=i_1}^{i_2} B[i]$ ist.

Gleichung (1) lässt sich am besten in einer Graphik veranschaulichen.



Dieser Trick funktioniert auch im höherdimensionalen Fall. Genau wie in Gleichung (1) gilt

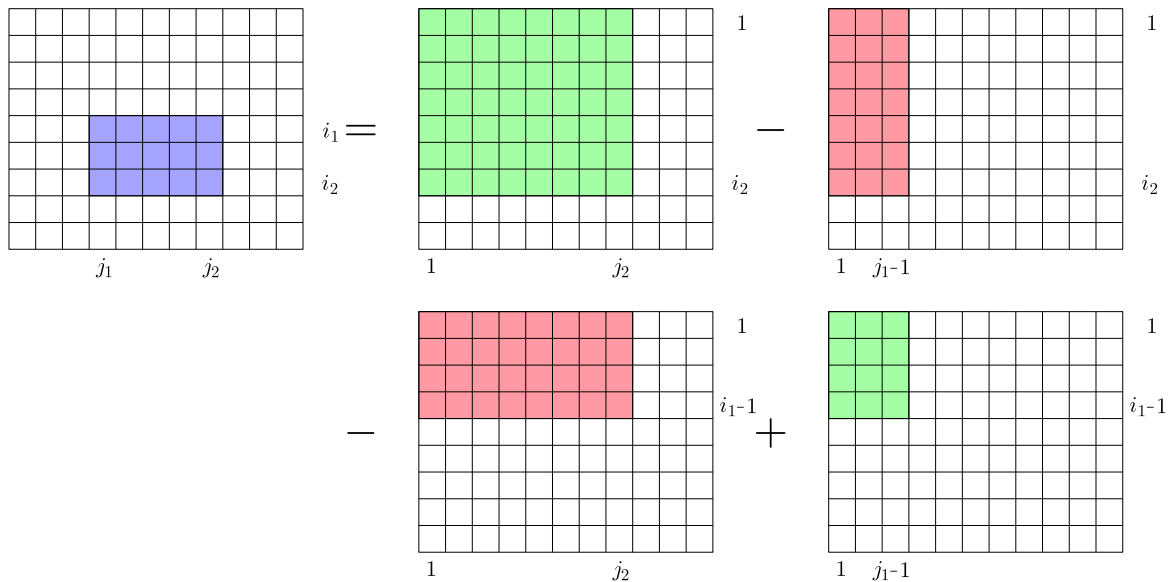
$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j] = \sum_{i=1}^{i_2} \left(\sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j] \right) - \sum_{i=1}^{i_1-1} \left(\sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j] \right),$$

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j] = \sum_{j=1}^{j_2} A[i, j] - \sum_{j=1}^{j_1-1} A[i, j] \text{ für alle } i$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j] &= \sum_{i=1}^{i_2} \left(\sum_{j=1}^{j_2} A[i, j] - \sum_{j=1}^{j_1-1} A[i, j] \right) - \sum_{i=1}^{i_1-1} \left(\sum_{j=1}^{j_2} A[i, j] - \sum_{j=1}^{j_1-1} A[i, j] \right) \\ &= \sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{j_2} A[i, j] - \sum_{i=1}^{i_2} \sum_{j=1}^{j_1-1} A[i, j] - \sum_{i=1}^{i_1-1} \sum_{j=1}^{j_2} A[i, j] + \sum_{i=1}^{i_1-1} \sum_{j=1}^{j_1-1} A[i, j]. \end{aligned} \quad (2)$$

Auch Gleichung (2) lässt sich in einer Graphik veranschaulichen.



Es genügt also, in `Init` alle Summen der Form $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l A[i, j]$ für $k = 0, \dots, m$ und $l = 0, \dots, n$ zu berechnen und in einem zweidimensionalen Feld S mit den Einträgen von $S[0, 0]$ bis $S[m, n]$ abzuspeichern. Per Konvention können wir alle Einträge $S[0, \cdot]$ und $S[\cdot, 0]$ auf 0 setzen. Berechnet man die Einträge von S zeilen- oder spaltenweise, ist diese Vorberechnung wieder in Zeit $O(1)$ pro Eintrag, also insgesamt in Zeit $O(m \cdot n)$ möglich. In der `Sum`-Funktion berechnen wir $S[i_2, j_2] - S[i_2, j_1 - 1] - S[i_1 - 1, j_2] + S[i_1 - 1, j_1 - 1]$, was wegen Gleichung (2) gleich $\sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} A[i, j]$ ist.

Wie bereits erwähnt, funktioniert dieser Trick auch in höheren Dimensionen. Eine andere Frage ist natürlich, inwieweit hochdimensionale Felder in der Praxis Anwendung finden, besonders im Hinblick auf das hier diskutierte Problem.

Genau wie bei der Herleitung von Gleichung (2) kann man den d -dimensionalen Fall auf den $(d-1)$ -dimensionalen Fall zurückführen, indem man die äußerste Summe $\sum_{i=i_1}^{i_2} \dots$ als $\sum_{i=1}^{i_2} \dots - \sum_{i=1}^{i_1-1} \dots$ schreibt. Dabei stehe „ \dots “ für die restlichen $d-1$ ineinander geschachtelten Summen. Nun ersetzen wir „ \dots “ durch die Formel für den $(d-1)$ -dimensionalen Fall. Besteht diese aus N Summanden, erhalten wir in obiger Darstellung $2N$ Summanden, also doppelt so viele wie im $(d-1)$ -dimensionalen Fall. Da wir im 1-dimensionalen Fall 2 Summanden haben, erhalten wir mit dieser Vorgehensweise genau 2^d Summanden im d -dimensionalen Fall. Dies ist für jede feste Dimension d konstant (bzgl. m und n), aber es wächst enorm mit d .