Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Musterlösung Übungsblatt 11

Aufgabe 11.5

(a) Für ein besseres Verständnis interpretieren wir die Negation des Pumping-Lemmas wieder als Spiel zwischen Vera und Peter auf der Sprache L (siehe Skript). Wenn Peter eine Gewinnstrategie besitzt, dann folgt mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist. Um zu zeigen, dass Peter den Sieg nicht erzwingen kann, geben wir eine Gewinnstrategie für Vera an.

1. Runde: Vera wählt $n = 1$.

2. Runde: Peter wählt ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n = 1$, also $z \in L \setminus \{\varepsilon\}$.

3. Runde: Sei $z = z_1 \dots z_m$. Vera wählt eine Zerlegung $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = z_1$ und $w = z_2 \dots z_m$.

4. Runde: Peter wählt eine beliebige ganze Zahl $i \geq 0$.

Das durch Vera und Peter konstruierte Wort ist $z' := uv^iw = z_1^i z_2 \dots z_m \in L$.

Wir zeigen, dass die Strategie von Vera eine Gewinnstrategie ist, d.h. es gilt $z' \in L$, egal wie Peter spielt. Das Wort z hat die Gestalt $z = 1^l$ für $l \geq 1$, $z = 0^k 1^l$ für $k \geq 1$ und $l \geq 0$ oder $z = 1^k 0^l 1^l$ für $k, l \geq 1$. Das Wort z' hat daher die Form $z' = 1^{l+i-1} \in L_1$, $z' = 0^{k+i-1} 1^l \in L_1$ oder $z = 1^{k+i-1} 0^l 1^l \in L_1 \cup L_2$.

(b) Wir führen die Annahme, dass L regulär ist, zu einem Widerspruch. Ist L regulär, dann gibt es einen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der L entscheidet. Sei $n = |Q|$ die Anzahl der Zustände von M. Wir betrachten die $n+1$ Worte $z_l = 10^{2n}1^l$, $l = 1, \dots, n+1$. Dann gibt es Indizes $l_1 < l_2$ mit $\delta^*(q_0, z_{l_1}) = \delta^*(q_0, z_{l_2})$. Demzufolge gilt auch $\delta^*(q_0, z_{l_1} 1^{2n-l_2}) = \delta^*(q_0, z_{l_2} 1^{2n-l_2})$, aber $z_{l_1} 1^{2n-l_2} = 10^{2n} 1^{2n+l_1-l_2} \notin L$, wohingegen $z_{l_2} 1^{2n-l_2} = 10^{2n} 1^{2n+l_2-l_2} = 10^{2n} 1^{2n} \in L$. Der DFA M würde also entweder beide Worte akzeptieren oder beide Worte verwerfen, obwohl genau eines von beiden zur Sprache L gehört. Das liefert den gewünschten Widerspruch.