Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

universitätbonn

Online-Algorithmen
Sommersemester 2013
Abgabe: 28.05.2013, 12:00 Uhr

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

6 Punkte

Wir haben für die Herleitung von Schranken für das k-Server-Problem, wie zum Beispiel in Theorem 3.3 und in Lemma 3.7, ausgenutzt, dass jeder deterministische Algorithmus A für das k-Server-Problem durch einen faulen deterministischen Algorithmus B ersetzt werden kann, dessen Kosten nicht größer sind. Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 6.2

2+2+2 Punkte

Für das k-Server-Problem auf der Linie haben wir verschiedene Aussagen über die optimale Zuordnung zweier Punktmengen verwendet. Seien $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq 1$ und $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_k \leq 1$ Punkte auf der Linie. Als Abstandsmaß betrachten wir die Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Die Zuordnung der Punkte y_j zu den Punkten x_i erfolgt durch eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_k$. Die Distanz beider Punktmengen bzgl. π ist dann $\delta_\pi = \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_{\pi(i)})$. Wir bezeichnen eine Zuordnung π^* als optimal, wenn $\delta_{\pi^*} = \min_{\pi \in \mathcal{S}_k} \delta_\pi$ gilt.

(a) Wir betrachten die identische Abbbildung π_{id}, gegeben durch $\pi_{\mathrm{id}}(i) = i$. Zeigen Sie, dass π_{id} optimal ist.

(b) Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein Index mit $y_j \leq x_1$. Zeigen Sie, dass es eine optimale Zuordnung π mit $\pi(1) = j$ gibt.

(c) Seien $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$ Indizes mit $x_i \leq y_j \leq x_{i+1}$. Zeigen Sie, dass es eine optimale Zuordnung π mit $\pi(i) = j$ oder mit $\pi(i+1) = j$ gibt.

Aufgabe 6.3

6 Punkte

Wir betrachten das k-Server-Problem auf Bäumen, bei dem die Server $o_1, \ldots, o_k$ auf Knoten des Baumes und die Server $s_1, \ldots, s_k$ auf Knoten oder Kanten des Baumes stehen. Wir verwenden die Metrik und den Nachbarschaftsbegriff aus der Vorlesung. Die Optimalität einer Zuordnung von Servern s_i zu Servern o_j definieren wir wie in Aufgabe 6.2.

Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein beliebiger Index und sei I die Menge der Indizes i der Nachbarn s_i von o_j. Zeigen Sie, dass es eine optimale Zuordnung π mit $\pi(i) = j$ für ein $i \in I$ gibt.

Aufgabe 6.4

6 Punkte

Wir betrachten den DC-Algorithmus für das k-Server-Problem auf Bäumen. Seien $s_1, \ldots, s_m$ die Server, die sich innerhalb einer Phase zu einer Anfrage σ_i hinbewegen. Zeigen Sie, dass es für jeden Server $s \in \{s_{m+1}, \ldots, s_k\}$, genau einen Server $s' \in \{s_1, \ldots, s_m\}$ gibt, zu dem sich die Distanz $d(s, s')$ vergrößert.