

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 7.1

3+3+2 Punkte

Wir betrachten metrische Räume  $\mathcal{M} = (M, d)$ , für die  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere konvexe Menge ist und die Metrik  $d$  folgende Eigenschaft besitzt: Für je drei Punkte  $x, y, r \in M$ , die auf einer Geraden liegen, wobei  $y$  zwischen  $x$  und  $r$  liegt, und einen beliebigen Punkt  $p \in M$  folgt aus  $d(x, p) \leq d(r, p)$ , dass auch  $d(y, p) \leq d(r, p)$  gilt.

- Zeigen Sie, dass der Raum  $\mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit dem euklidischen Abstand, ein solcher Raum ist.
- Zeigen Sie, dass der  $SC_{\frac{1}{2}}$ -Algorithmus 3-kompetitiv für das 2-Server-Problem in jedem solchen metrischen Raum  $\mathcal{M}$  ist.
- Geben Sie eine Metrik  $d$  auf  $\mathbb{R}$  an, für die der metrische Raum  $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, d)$  nicht die gewünschte Eigenschaft besitzt.

### Aufgabe 7.2

8 Punkte

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender einfacher gewichteter Graph, der eine Metrik  $\mathcal{M}$  darstellt, und sei  $T = (V, E_T)$  ein minimaler Spannbaum von  $G$ . Für Korollar 3.10 benötigen wir eine Aussage über den Zusammenhang der Metrik  $\mathcal{M}$  und der von  $T$  induzierten Baummetrik  $\mathcal{M}_T$ .

Zeigen Sie, dass gilt: Ist  $e = \{x, y\}$  eine Kante von  $G$  mit Gewicht  $w(e)$ , dann beträgt die Länge des Weges von  $x$  nach  $y$  im Spannbaum  $T$  höchstens  $(N - 1) \cdot w(e)$ , wobei  $N = |V|$  die Größe der Metrik  $\mathcal{M}$  ist.

### Aufgabe 7.3

8 Punkte

Wir betrachten das  $k$ -Server-Problem auf einem Kreis  $C$  mit Umfang 1. Der Abstand  $d(x, y)$  zweier Punkte  $x, y \in C$  ist gegeben durch die Länge des kürzeren Kreisbogens, der sie verbindet.

Geben Sie einen randomisierten Online-Algorithmus für das  $k$ -Server-Problem auf dem metrischen Raum  $(C, d)$  an, der  $2k$ -kompetitiv gegen blinde Gegenspieler ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst folgende Aussage: Trennen wir den Kreis  $C$  an einem uniform zufällig gewählten Punkt  $p \in C$  auf und interpretieren das so entstandene Kreissegment  $C'$  als Linie mit der üblichen Metrik  $d'$ , dann gilt für zwei beliebige Punkte  $x, y \in C$  die Ungleichung  $\mathbf{E}[d'(x, y)] \leq 2d(x, y)$ , wobei der Erwartungswert über alle Punkte  $p \in C$  gebildet wird.