Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Online-Algorithmen
Sommersemester 2012
Abgabe: 10.05.2012 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

2+2+6 Punkte

Wir betrachten folgende Modifikationen des Paging-Problems:

(a) Zusätzlich zu jedem Seitenzugriff erhält man die Information, wie die nächsten $k-1$ Seitenzugriffe aussehen. Zeigen Sie, dass kein deterministischer Algorithmus für dieses Problem besser als k-kompetitiv ist.

(b) Zusätzlich zu jedem Seitenzugriff erhält man die Information, auf welche anderen $k-1$ paarweise verschiedenen Seiten als nächstes zugegriffen wird. Zeigen Sie, dass jeder deterministische Markierungsalgorithmus, der nur Seiten verdrängt, auf die in der aktuellen Phase nicht zugegriffen wird, strikt 2-kompetitiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Algorithmus für das Problem aus Aufgabenteil (b) besser als $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$-kompetitiv ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein optimaler Offline-Algorithmus auf einer Sequenz der Länge n, bei der auf höchstens $2k$ Seiten zugegriffen wird, maximal $n \cdot \frac{k+1}{2k} + k - 1$ Seitenfehler verursacht.

Aufgabe 5.2

8 Punkte

In Theorem 2.14 haben wir gezeigt, dass kein randomisierter Online-Algorithmus für das Paging-Problem einen besseren kompetitiven Faktor als H_k gegen einen blinden Gegenspieler erreicht, nicht einmal auf Instanzen, die nur auf $k+1$ verschiedene Seiten zugreifen. Dazu haben wir für eine Sequenz σ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, \ldots, p_{k+1})$ verwendet, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass nach Bearbeitung der Sequenz σ Seite i nicht im Cache ist. Die Sequenz wurde sukzessive gemäß diesen Wahrscheinlichkeiten generiert.

Die naheliegendste Konstruktionsvorschrift ist, zu jedem Zeitpunkt auf die Seite zuzugreifen, für die die Wahrscheinlichkeit am größten ist, dass sie zu diesem Zeitpunkt nicht im Cache ist. Wir wollen zeigen, dass diese Vorschrift zu einer deutlich schlechteren unteren Schranke als H_k führt.

Geben Sie für eine beliebig kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ einen randomisierten Algorithmus A an, der auf der gemäß obiger Vorschrift gegen ihn konstruierten Sequenz σ_A erwartete Kosten von

$$\mathbf{E}\left[w_A(\sigma_A)\right] \leq \left(1 + \frac{1}{k} + \varepsilon\right) \cdot \mathrm{OPT}(\sigma_A) + \tau$$

für eine geeignete Konstante τ verursacht.

Aufgabe 5.3

6 Punkte

Wir betrachten die Reduktion des k-Server-Problems auf das Min-Cost-Flow-Problem. Zeigen Sie, dass der maximale Fluss f mit minimalen Kosten alle Kanten der Form (σ_j, σ'_j) voll auslastet.

Hinweis: Sie können annehmen, dass f ganzzahlig ist.