Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Online-Algorithmen
Sommersemester 2012
Abgabe: 19.04.2012 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

6 Punkte

Sei A ein Markierungsalgorithmus für einen Cache der Größe k. Wir wollen die durch A verursachten Kosten mit den Kosten eines optimalen Paging-Algorithmus, dem nur ein Cache der Größe $h \leq k$ zur Verfügung steht, vergleichen. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Konstante τ

$$w_A(\sigma) \leq \frac{k}{k-h+1} \cdot \mathrm{OPT}_h(\sigma) + \tau$$

für alle Sequenzen σ gilt.

Aufgabe 2.2

5+1 Punkte

Wir betrachten ein realistischeres Pagingmodell, bei dem jeder Cache-Zugriff Kosten 1 verursacht und bei einem Seitenfehler zusätzliche Kosten von s entstehen, um die Seite aus dem Hauptspeicher zu holen. Für eine Sequenz σ mit $\ell \geq 2$ Phasen bezeichne $L(\sigma)$ die durchschnittliche Phasenlänge der ersten $\ell - 1$ Phasen.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden Markierungsalgorithmus A die Ungleichung

$$w_A(\sigma) \leq \left(1 + \frac{(k-1) \cdot s}{L(\sigma) + s}\right) \cdot \mathrm{OPT}(\sigma) + \tau$$

für eine geeignete Konstante τ gilt. Welcher kompetitive Faktor lässt sich daraus für Markierungsalgorithmen folgern?

(b) Welchen Einfluss hat $L(\sigma)$ auf das Verhältnis von $w_A(\sigma)$ und $\mathrm{OPT}(\sigma)$ im ursprünglichen Kostenmodell, in dem Cache-Zugriffe keine Kosten und Hauptspeicherzugriffe Kosten von 1 verursachen?

Aufgabe 2.3

6 Punkte

Wir betrachten das sogenannte *Coupon Collector's Problem*: Anlässlich der Fußball-Europameisterschaft werden Sammelbilder auf den Markt gebracht, die nicht gezielt erworben, sondern nur einzeln in verschlossenen Tüten gekauft werden können. Insgesamt gibt es n verschiedene Motive. In jeder Tüte befindet sich unabhängig und uniform zufällig eins davon.

Wie viele Tüten muss ein Sammler im Erwartungswert kaufen, bis er alle Motive zusammen hat?

Aufgabe 2.4

2+2+2 Punkte

Sei A ein randomisierter Online-Algorithmus für das Paging-Problem. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn A r-kompetitiv gegen jeden adaptiven-offline Gegner ist, dann ist A auch r-kompetitiv gegen jeden adaptiven-online Gegner.

(b) Wenn A r-kompetitiv gegen jeden adaptiven-online Gegner ist, dann ist A auch r-kompetitiv gegen jeden blinden Gegner.

(c) Wenn A ein deterministischer Online-Algorithmus ist, dann gelten in den Aufgabenteilen (a) und (b) auch die Rückrichtungen.