

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Multicommodity-Flow-Probleme sind Erweiterungen des einfachen Flussproblems und lassen sich wie folgt beschreiben: Es gibt mehrere Quelle-Senke-Paare (s_i, t_i) , $i = 1, \dots, I$, zwischen denen jeweils ein Fluss f_i fließt. Die Kapazität einer Kante beschränkt den Gesamtfluss aller Güter (*Commodities*) über diese Kante. Für jeden Fluss f_i gilt Flussershaltung. Wir betrachten zwei Varianten des Multicommodity-Flow-Problems:

- **Absolute Variante:** Maximiere den Gesamtfluss, also die Summe der Flüsse f_i .
 - **Relative Variante:** Es gibt zusätzlich Bedarfe (*Demands*) d_1, \dots, d_I , die die Flüsse der einzelnen Güter beschränken. Der relative Fluss von Gut i ist f_i/d_i . Maximiere das Minimum der relativen Flüsse.
- (a) Formulieren Sie beide Varianten als LP und bringen Sie sie in kanonische Form.
- (b) Wir wissen, dass für das einfache Flussproblem mit ganzzahligen Kantenkapazitäten immer eine ganzzahlige optimale Lösung existiert. Finden Sie Gegenbeispiele für die oben definierten Varianten des Multicommodity-Flow-Problems.

Aufgabe 5.2

Ein *Integer Linear Program* (ILP) ist ein lineares Programm, in dem alle Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Die Koeffizienten in der Zielfunktion und in den Nebenbedingungen können weiterhin reell sein. Formulieren Sie die folgenden Probleme als ILP:

- (a) SAT,
- (b) SET COVER,
- (c) SCHEDULING.

Aufgabe 5.3

Wir betrachten das LP

$$\begin{aligned} \max & 50x_1 + 32x_2 \\ 50x_1 + 31x_2 & \leq 250 \\ 3x_1 - 2x_2 & \geq -4 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

und das zugehörige ILP mit den zusätzlichen Nebenbedingungen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie graphisch die exakten Lösungen beider Programme.

Aufgabe 5.4

Wir betrachten das fraktionale Rucksackproblem, das in Aufgabe 1.3 bereits als LP formuliert wurde.

- (a) Charakterisieren Sie die Basislösungen dieses Problems.
Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Charakterisierung von Basislösungen für die kanonische Darstellung.
- (b) Wann ist das fraktionale Rucksackproblem degeneriert?