

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

2+4 Punkte

Für das Scheduling-Problem auf m identischen Maschinen seien $n = 2m$ Jobs gegeben und es gelte $p_1 \geq \dots \geq p_n$. Wir betrachten den durch den LPT-Algorithmus erzeugten Schedule π .

- (a) Zeigen Sie, dass π im Allgemeinen nicht optimal ist.
- (b) Zeigen Sie, dass π optimal ist, wenn $p_n > \frac{\text{OPT}}{3}$ gilt, wobei OPT der optimale Makespan ist.
Hinweis: In diesem Fall weist π jeder Maschine i gerade die Jobs i und $n - i + 1$ zu.

Aufgabe 4.2

3+3 Punkte

- (a) Geben Sie einen pseudopolynomiellen Algorithmus für das Scheduling-Problem auf $m = 3$ Maschinen an.
- (b) Entwerfen Sie ein FPTAS für das Scheduling-Problem auf $m = 3$ identischen Maschinen.

Aufgabe 4.3

4+4+4 Punkte

Wir betrachten eine Verallgemeinerung des Scheduling-Problems, bei dem für jeden Job j und jede Maschine i die individuelle Ausführungszeit p_{ij} von Job j auf Maschine i gegeben ist. Die Laufzeit einer Maschine i bezüglich eines Schedules π ist dann $L_i(\pi) = \sum_{j \in J: \pi(j)=i} p_{ij}$. Für jeden Job j sei $p_j^* = \min_{i \in M} p_{ij}$ die minimal mögliche Ausführungszeit.

Analysieren Sie die folgenden beiden Greedy-Algorithmen A und B : Algorithmus A ist die Verallgemeinerung des Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung, d.h. ein Job wird stets der Maschine zugeordnet, die nach der Zuweisung des Jobs die kleinste Ausführungszeit besitzt. Algorithmus B weist jeden Job j der Maschine i zu, auf der seine Ausführungszeit minimal ist, d.h. $p_{ij} = p_j^*$.

- (a) Zeigen Sie, dass Algorithmus B stets eine m -Approximation liefert.
- (b) Zeigen Sie, dass Algorithmus A stets eine m -Approximation liefert.
- (c) Zeigen Sie, dass Algorithmus A ein $\Omega(m)$ -Approximationsalgorithmus ist.

Hinweis: Der Beweis von Aufgabenteil (b) ähnelt dem von Aufgabenteil (a), jedoch ist eine der Aussagen nicht mehr offensichtlich. Diese kann mittels Induktion über n gezeigt werden. Eine mögliche Beispielklasse für Aufgabenteil (c) verwendet genau so viele Jobs wie Maschinen. Jeder der Jobs besitzt nur auf zwei Maschinen eine endliche Ausführungszeit.