Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Algorithmen und Berechnungskomplexität III
Sommersemester 2011

Probeklausur

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

1. Unter Prüfungsbedingungen hätten Sie 90 Minuten Zeit, diese Klausur zu bearbeiten.
2. Es können maximal 48 Punkte erreicht werden.
3. Die Probeklausur hat keinerlei Einfluss auf die Prüfungszulassung oder die endgültige Note. Die Besprechung findet im Ferientutorium statt.
4. Betrachten Sie während der gesamten Klausur die Beziehung $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ als gegeben.

Aufgabe 1

2+2+2+2+2=10 Punkte

(a) Was ist ein r-Approximationsalgorithmus für ein Minimierungsproblem Π?

(b) Was ist das metrische Traveling Salesperson Problem (TSP)?

(c) Wann ist ein Algorithmus pseudopolynomiell? Wann ist ein Problem stark $\mathcal{NP}$-hart?

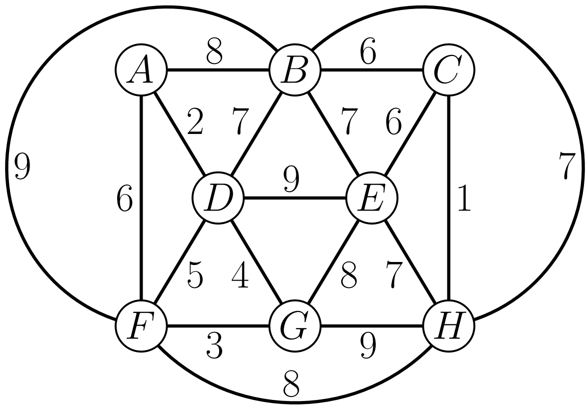
(d) Was ist eine Basislösung eines linearen Programmes?

(e) Wann ist ein lineares Programm degeneriert?

Aufgabe 2

4+5=9 Punkte

(a) Wenden Sie den 2-Approximationsalgorithmus für das metrische Traveling Salesperson Problem auf die unten abgebildete Instanz an. Dabei sei das Kantengewicht einer nicht eingezeichneten Kante $\{u, v\}$ gerade die Länge eines kürzesten Weges von u nach v. Geben Sie den Eulerkreis, die Tour und deren Längen an.



(b) Zeigen Sie, dass es keinen 2-Approximationsalgorithmus für das allgemeine Traveling Salesperson Problem gibt.

Aufgabe 3

4+4=8 Punkte

(a) Bei dem Problem $\texttt{PARTITION}_3$ sind n natürliche Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ gegeben und es soll entschieden werden, ob es eine 3-Partition (I_1, I_2, I_3) der Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i = \sum_{i \in I_3} b_i$ gilt. Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Problem in Zeit $O(n^3 \cdot B^2)$ entscheidet, wobei $B = \max_{i=1,\ldots,n} b_i$ ist.

(b) Wir betrachten das Rucksackproblem mit Kapazität $b = 6$ und $n = 6$ Objekten mit den folgenden Gewichten und Nutzenwerten:

i	1	2	3	4	5	6
w_i	3	4	1	5	3	2
p_i	36	41	17	47	29	23

Lösen Sie das Rucksackproblem mittels dynamischer Programmierung.

Aufgabe 4

5+4=9 Punkte

(a) Bei BIN COVERING sind n Objekte mit Gewichten $w_1, \dots, w_n \in (0,1)$ und eine unbegrenzte Anzahl an Eimern (*Bins*) gegeben. Ziel ist es, die n Objekte so auf die Eimer zu verteilen, dass in möglichst vielen Eimern Objekte mit Gesamtgewicht mindestens 1 liegen. Formal ausgedrückt suchen wir eine Funktion $f\colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$, für die $\left|\left\{i \in \mathbb{N} : \sum_{j:f(j)=i} w_j \geq 1\right\}\right|$ maximal ist.

Bei der Online-Variante von BIN COVERING muss jedes Objekt i einem Eimer zugeteilt werden, ohne die Anzahl n der Objekte oder die Gewichte der Objekte $i+1, \dots, n$ zu kennen.

Geben Sie einen strikt 2-kompetitiven Online-Algorithmus an.

(b) Zeigen Sie, dass es für kein $r < 2$ einen strikt r-kompetitiven Online-Algorithmus gibt.

Aufgabe 5

4+4+4=12 Punkte

(a) Ein Unternehmer stellt 2 Produkte P_1 und P_2 her. Jedes Produkt durchläuft nacheinander die Werkstätten A_1, A_2 und A_3. Dabei haben die Werkstätten gewisse Kostensätze und nur begrenzte Kapazitäten:

Werkstatt	A_1	A_2	A_3
Kostensatz (in €/Std)	4	6	8
Kapazität (in Std)	500	1500	400

Folgende Tabelle zeigt die Bearbeitungszeiten in den Werkstätten (in Stunden pro Einheit):

	A_1	A_2	A_3
P_1	1	3	1
P_2	2	4	1

Dazu kommen noch Materialkosten:

Produkt	P_1	P_2
Materialkosten (in €/Einheit)	5	10

Produkt P_1 wird für 50 € pro Einheit, Produkt P_2 für 70 € pro Einheit verkauft. Dabei sollen von P_1 maximal 280 Einheiten und von P_2 maximal 180 Einheiten gefertigt werden. Wie viele Einheiten von Produkt P_1 bzw. von Produkt P_2 sollte der Unternehmer herstellen, um seinen Gewinn zu maximieren?

Modellieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP). Sie können davon ausgehen, dass der Unternehmer nicht nur ganzzahlige Einheiten beider Produkte herstellen kann.

(b) Bestimmen Sie für folgendes LP graphisch die exakte optimale Lösung und deren Zielfunktionswert:

$$\begin{aligned}
&\min x - 4y + z \\
&4y - z \leq 0 \\
&3x - 5y + 2z \leq 25 \\
&2x - 3y + z = 10 \\
&x, y \geq 0, z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(c) Ein *Integer Linear Program* (ILP) ist ein lineares Programm, in dem alle Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Die Koeffizienten in der Zielfunktion und in den Nebenbedingungen können weiterhin reell sein.

Formulieren Sie das Optimierungsproblem CLIQUE als ILP.