Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

3 Punkte

Seien L_1 und L_2 Sprachen über einem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass L_2 auf L_1 reduzierbar ist, wenn sich L_1 surjektiv auf L_2 reduzieren lässt, d.h. es gibt eine surjektive berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$$

für alle Wörter $x \in \Sigma^*$.

Aufgabe 7.2

3 Punkte

Seien $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Eine Abbildung $f\colon V \to \{1, \dots, k\}$, die jedem Knoten v eine Farbe aus $\{1, \dots, k\}$ zuweist, heißt *zulässige k-Färbung* von G, wenn keine adjazenten Knoten u und v existieren, die mit derselben Farbe gefärbt wurden, d.h. $f(u) \neq f(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$. Ein Graph heißt *k-färbbbar*, wenn eine zulässige k-Färbung des Graphen existiert.

Geben Sie eine Algorithmus an, der in Polynomialzeit eine 2-Färbung eines gegebenen Graphen $G = (V, E)$ bestimmt oder, falls eine solche nicht existiert, „nein“ ausgibt.

Aufgabe 7.3

6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $X \subseteq V$ heißt *Dominating Set* von G, wenn jeder Knoten von G in X liegt oder adjazent zu einem Knoten aus X ist. Bei der *Entscheidungsvariante* von `DOMINATING SET` soll für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k entschieden werden, ob G ein Dominating Set mit höchstens k Knoten besitzt.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `3-SAT` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `DOMINATING SET` reduzieren lässt.

Aufgabe 7.4

6 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn die Kanten von M paarweise knotendisjunkt sind, d.h. $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$. Eine Menge $I \subseteq V$ heißt *Independent Set* von G, wenn innerhalb von I keine Kante verläuft, d.h. I ist eine Clique im Komplementgraphen $\overline{G}$. Bei den *Entscheidungsvarianten* von `MATCHING` und `INDEPENDENT SET` soll für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k entschieden werden, ob G ein Matching beziehungsweise ein Independent Set der Größe mindestens k besitzt.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `MATCHING` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `INDEPENDENT SET` reduzieren lässt.

Aufgabe 7.5

6 Punkte

Für eine Marsmission werden Experten für n Fachgebiete (Astronomie, Geologie, Technik, Physik, Informatik, Biologie, ...) benötigt. Es stehen m Freiwillige zur Verfügung. Für jede Person ist bekannt, auf welchen dieser Gebiete sie Experte ist. Die Aufgabe ist es, eine Besatzung aus möglichst wenigen Personen zusammenzustellen, sodass es für jedes Fachgebiet mindestens einen Experten gibt.

Geben Sie eine mengentheoretische Formalisierung der Entscheidungsvariante von `MISSION TO MARS` an und zeigen Sie, dass das Problem $\mathcal{NP}$-vollständig ist.