Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2011
Abgabe: 18.05.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

6 Punkte

Wir betrachten das Problem `PARTITION`. Eingabe hierfür sind natürliche Zahlen $b_1, \dots, b_n$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von `PARTITION` soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge I_1 der Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass gilt: $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i$, wobei $I_2 = I \setminus I_1$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `PARTITION` soll eine solche Partition (I_1, I_2) von I ausgegeben werden, falls sie existiert. Ansonsten soll „Nein“ ausgegeben werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `PARTITION` in $\mathcal{P}$ liegt, wenn die Entscheidungsvariante von `PARTITION` in $\mathcal{P}$ liegt.

Aufgabe 6.2

6 Punkte

Wir betrachten das Problem `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von `VERTEX COVER` soll für eine zusätzlich gegebene Zahl $k \leq |V|$ entschieden werden, ob es eine höchstens k-elementige Teilmenge X der Knotenmenge V gibt, sodass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten aus X inzident ist. Eine solche Menge heißt *Vertex Cover* von G.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `VERTEX COVER` soll ein minimales Vertex Cover von G bestimmt werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `VERTEX COVER` in $\mathcal{P}$ liegt, wenn die Entscheidungsvariante von `VERTEX COVER` in $\mathcal{P}$ liegt.

Aufgabe 6.3

2+2+2 Punkte

Zeigen Sie jeweils mit Hilfe eines Polynomialzeitverifizierers, dass die folgenden Entscheidungsprobleme in $\mathcal{NP}$ sind. Beschreiben Sie dazu die Kodierung und die Länge des Zertifikats sowie die Arbeitsweise des Verifizierers.

(a) $\mathrm{MST} = \left\{ \mathrm{code}(G)\#\mathrm{code}(w)\#\mathrm{bin}(c) : \begin{array}{l} G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit Kantengewichtung } w \\ \text{und besitzt einen Spannbaum } T \text{ mit } w(T) \geq c,\ c \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$,

(b) $\mathrm{COMPOSITE} = \{\mathrm{bin}(k) : \ k \in \mathbb{N} \text{ und } k \text{ ist } \textbf{keine} \text{ Primzahl}\}$,

(c) $\mathrm{GRAPHISOMORPHIE} = \left\{ \mathrm{code}(G_1)\#\mathrm{code}(G_2) : \begin{array}{l} G_1, G_2 \text{ sind gerichtete Graphen} \\ \text{und } G_1 \text{ ist isomorph zu } G_2 \end{array} \right\}$.

Ein gerichteter Graph $G_1 = (V, E_1)$ heißt *isomorph* zu einem gerichteten Graphen $G_2 = (V, E_2)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f \colon V \to V$ gibt, sodass für alle Knoten $u, v \in V$ gilt:

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2 \,.$$

Isomorphe Graphen sind also bis auf die Bezeichnung ihrer Knoten identisch.

Aufgabe 6.4

6 Punkte

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `VERTEX COVER` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `CLIQUE` reduzieren lässt.

Hinweis: Für die Analyse ist es nützlich, den Komplementgraphen $\overline{G}$ eines gegebenen Graphen G zu betrachten, der genau die Kanten enthält, die G nicht enthält.