Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2011
Abgabe: 11.05.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

3+3 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Sprachen entscheidbar sind:

(a) $L_{\text{even}} = \left\{ \langle M \rangle : \begin{array}{l} M \text{ akzeptiert alle Eingaben gerader Länge und} \\ \text{verhält sich auf allen anderen Eingaben beliebig} \end{array} \right\}$,

(b) $H_\varepsilon^{\text{even}} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf der leeren Eingabe nach gerade vielen Schritten}\}$.

Aufgabe 5.2

3+3 Punkte

Wir betrachten Sprachen $L_1, L_2, \ldots$ und $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$. Finden Sie Gegenbeispiele für jede der folgenden beiden Aussagen:

(a) Wenn $L_1, L_2, \ldots$ rekursiv sind, dann ist L rekursiv aufzählbar.

(b) Wenn L rekursiv ist, dann sind alle Sprachen $L_1, L_2, \ldots$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5.3

3+3 Punkte

Seien L_1, L_2 und L_3 rekursiv aufzählbare Sprachen über dem Alphabet Σ. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichne $I(w) \subseteq \{1, 2, 3\}$ die Menge, die genau die Indizes i mit $w \in L_i$ enthält. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Sprache $L_{\geq 2} = \{w \in \Sigma^* : |I(w)| \geq 2\}$ ist rekursiv aufzählbar.

(b) Die Sprache $L_{=2} = \{w \in \Sigma^* : |I(w)| = 2\}$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5.4

1+1+1+1+1+1 Punkte

Analog zum in der Vorlesung eingeführten Reduktionskonzept betrachten wir nun das Konzept der polynomiellen Reduktion: Eine Sprache L_1 heißt *polynomiell reduzierbar auf* eine Sprache L_2, kurz $L_1 \leq_p L_2$, wenn eine **in Polynomialzeit** berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L_1 \Longleftrightarrow f(x) \in L_2 \,.$$

Wir betrachten zwei Sprachen L_1 und L_2. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass „ja“, „nein“ und „keine Aussage möglich“ als Antworten in Frage kommen.

Für (a) bis (c) nehmen wir an, dass $L_1 \leq L_2$ gilt.

(a) Wenn L_2 in $\mathcal{P}$ liegt, liegt dann L_1 in $\mathcal{P}$?

(b) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, liegt dann L_2 in $\mathcal{P}$?

(c) Wenn L_1 in $\mathcal{P}$ liegt, ist dann L_2 entscheidbar?

Für (d) bis (f) nehmen wir an, dass $L_1 \leq_p L_2$ gilt.

(d) Wenn L_2 in $\mathcal{P}$ liegt, liegt dann L_1 in $\mathcal{P}$?

(e) Wenn L_1 nicht in $\mathcal{P}$ liegt, ist dann L_2 entscheidbar?

(f) Wenn L_1 nicht entscheidbar ist, ist dann L_2 entscheidbar?