Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch

Algorithmen und Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2011
Abgabe: 20.04.2011 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

4+2 Punkte

(a) Wir betrachten Mengen M_i, $i = 1, 2, \ldots$, sowie die Menge $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Zeigen Sie, dass M **genau dann** abzählbar ist, wenn alle Mengen M_i abzählbar sind.

(b) Welche Mächtigkeit besitzt die Menge aller nichtentscheidbaren Sprachen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Nutzen Sie Wissen aus der Vorlesung und Aufgabenteil (a).

Aufgabe 2.2

6 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die Sprache

$$D_H = \left\{w \in \{0,1\}^* \,:\, w = w_i \text{ und } M_i \text{ hält nicht auf } w_i\right\}$$

nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 2.3

2+2+2 Punkte

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $H_{\leq 42} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf jeder Eingabe nach höchstens 42 Schritten}\}$

(b) $\mathrm{TAPE}_{\mathrm{linear}} = \{\langle M \rangle w : M \text{ benutzt bei Eingabe } w \text{ nur Bandzellen mit Index } i \in \{-|w|, \ldots, |w|\}\}$

(c) $\mathrm{TAPE}_{\mathrm{positiv}} = \{\langle M \rangle w : M \text{ benutzt bei Eingabe } w \text{ nur Bandzellen mit Index } i \in \{1, 2, \ldots\}\}$

Die Bandzellen seien von links nach rechts aufsteigend durchnummeriert, wobei die Bandzelle, auf der der Lese-Schreib-Kopf zu Beginn steht, die Nummer 1 besitzt.

Aufgabe 2.4

3+3 Punkte

Seien L_1 und L_2 entscheidbare Sprachen über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie, dass

(a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $\overline{L_1} := \Sigma^* \setminus L_1$ und

(b) $L_1 \cdot L_2 := \{w_1 w_2 \in \Sigma^* : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

entscheidbare Sprachen sind.