

Probeklausur

Namen:

Übungsgruppe:

<input type="radio"/>	Dienstag, 10-12	<input type="radio"/>	Donnerstag, 14-16
<input type="radio"/>	Mittwoch, 10-12	<input type="radio"/>	Freitag, 8-10
<input type="radio"/>	Donnerstag, 10-12	<input type="radio"/>	Freitag, 10-12
<input type="radio"/>	Donnerstag, 12-14	<input type="radio"/>	Freitag, 12-14

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

1. Unter Prüfungsbedingungen hätten Sie 90 Minuten Zeit, diese Klausur zu bearbeiten.
2. Es können maximal 48 Punkte erreicht werden. Die Hälfte der erreichten Punkte geht als Zusatzpunkte für die Übungen ein.
3. Die auf diese Klausur vergebene Note dient lediglich zur Einschätzung Ihres Wissensstandes und hat keinerlei Einfluss auf die endgültige Note.
4. Geben Sie Ihre Lösungen entweder am 01.06.2011 in der Vorlesung oder in der 22. Kalenderwoche in den Übungen ab.
5. Wie bei den regulären Übungsaufgaben können Sie Ihre Lösungen als Gruppe, bestehend aus bis zu drei Personen, abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Note:

Aufgabe 1

2+2+2+3+2+3=14 Punkte

- (a) Definieren Sie, was eine deterministische 1-Band Turingmaschine ist.
- (b) Was bedeutet, dass eine Turingmaschine eine Sprache L entscheidet bzw. eine Sprache L erkennt?
- (c) Prof. G. Witzt behauptet, eine rekursiv aufzählbare Sprache L gefunden zu haben, deren Komplement \bar{L} ebenfalls rekursiv aufzählbar ist. Kann das sein?
- (d) Ist die Sprache L , gegeben durch $L = L_1 \cup L_2$ mit

$$L_1 = \{\langle M \rangle : M \text{ hält nicht auf der leeren Eingabe}\} \quad \text{und}$$

$$L_2 = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf der leeren Eingabe, aber frühestens nach 100 Schritten}\}$$

rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

- (e) Prof. G. Witzt behauptet, $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gezeigt zu haben. Dazu hat er einen Algorithmus mit worst-case Laufzeit $O(n^2 \cdot P)$ für das Rucksack-Problem entwickelt, wobei n die Anzahl der Objekte und P das Maximum über alle Nutzenwerte der Objekte ist. Kann es einen solchen Algorithmus geben? Hat er wirklich $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gezeigt?
- (f) Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. L_1 sei auf L_2 mit einer in Zeit $O(n \log n)$ berechenbaren Funktion reduzierbar. Kann L_2 in Zeit $O(n^2)$ entschieden werden, wenn man weiß, dass
 - (1) L_1 nicht in Zeit $O(n)$ entschieden werden kann bzw.
 - (2) L_1 nicht in Zeit $O(n^2)$ entschieden werden kann bzw.
 - (3) L_1 nicht in Zeit $O(n^3)$ entschieden werden kann?

Aufgabe 2

4+3+4+3=14 Punkte

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für beliebige rekursiv aufzählbare Sprachen L_1, \dots, L_9 über dem Alphabet Σ ist die Sprache

$$L_{\geq 3}^{\leq 5} = \{w \in \Sigma^* : \text{Es gibt mindestens 3 und höchstens 5 Indizes } i \in \{1, \dots, 9\} \text{ mit } w \in L_i\}$$

stets rekursiv aufzählbar.

- (b) Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}_{\text{connect}}$ aller Turingmaschinen, die sich auf einer Eingabe w wie folgt verhalten: Ist $w = \text{code}(G)$ für einen ungerichteten Graphen G , dann wird w genau dann akzeptiert, wenn G zusammenhängend ist, und ansonsten verworfen. Für das Verhalten auf anderen Eingaben w gibt es keine Einschränkungen.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Sprache

$$L_{\text{connect}} = \{\langle M \rangle : M \in \mathcal{M}_{\text{connect}}\}$$

entscheidbar ist.

- (c) Zeigen Sie, dass die Sprache $\overline{H}_\varepsilon^{\text{even}}$, gegeben durch

$$\overline{H}_\varepsilon^{\text{even}} = \{\langle M \rangle : M \text{ hält auf der leeren Eingabe nicht nach einer geraden Anzahl an Schritten}\},$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.

- (d) Ist die Sprache

$$L = \left\{ \text{code}(p) : \begin{array}{l} p \text{ ist ein univariates Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten} \\ \text{und es gibt eine ganze Zahl } z \text{ mit } p(z) = 3 \end{array} \right\}$$

rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3

5+6=11 Punkte

- (a) Bei der *Entscheidungsvariante* von MAX SAT geht es darum, für eine gegebene Formel ϕ in KNF und eine natürliche Zahl t zu entscheiden, ob es eine Belegung der in ϕ vorkommenden Variablen gibt, unter der mindestens t Klauseln von ϕ wahr sind. Bei der *Optimierungsvariante* von MAX SAT soll eine Belegung der Variablen ausgegeben werden, unter der maximal viele Klauseln von ϕ wahr sind.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von MAX SAT in \mathcal{P} liegt, falls die Entscheidungsvariante von MAX SAT in \mathcal{P} liegt.

- (b) Ein *Hamiltonkreis* in einem gerichteten Graphen ist ein gerichteter Kreis, der alle Knoten des Graphen genau einmal enthält. Bei der *Entscheidungsvariante* von HAMILTONIAN CYCLE soll für einen gegebenen gerichteten Graphen entschieden werden, ob dieser einen Hamiltonkreis enthält. Bei der *Entscheidungsvariante* von PATH geht es darum zu entscheiden, ob ein gegebener gerichteter Graph einen gerichteten einfachen Weg der Länge mindestens k für eine natürliche Zahl k , die ebenfalls Teil der Eingabe ist, enthält.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von HAMILTONIAN CYCLE polynomiell auf die Entscheidungsvariante von PATH reduzieren lässt.

Aufgabe 4

3+6=9 Punkte

- (a) Geben Sie eine äquivalente Charakterisierung von \mathcal{NP} mittels Zertifikaten an.
- (b) Zeigen Sie, dass es für jede Sprache $L \in \mathcal{NP}$ Polynome p und q und eine deterministische Turingmaschine M mit Laufzeit $O(q(n) \cdot 2^{p(n)})$ gibt, wobei n die Eingabelänge ist, die die Sprache L entscheidet.